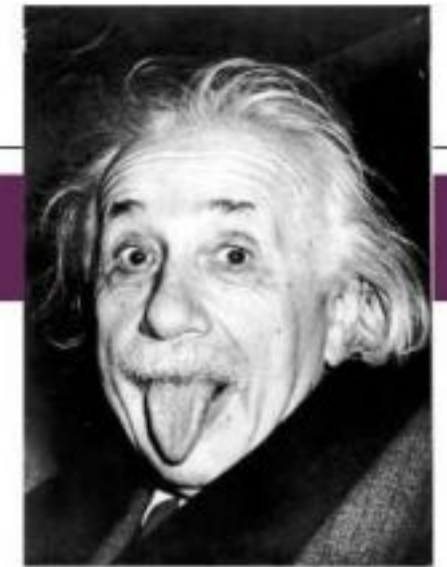


# 6º Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera Canguro 2013

## El Rincón del Abuelo Anacleto

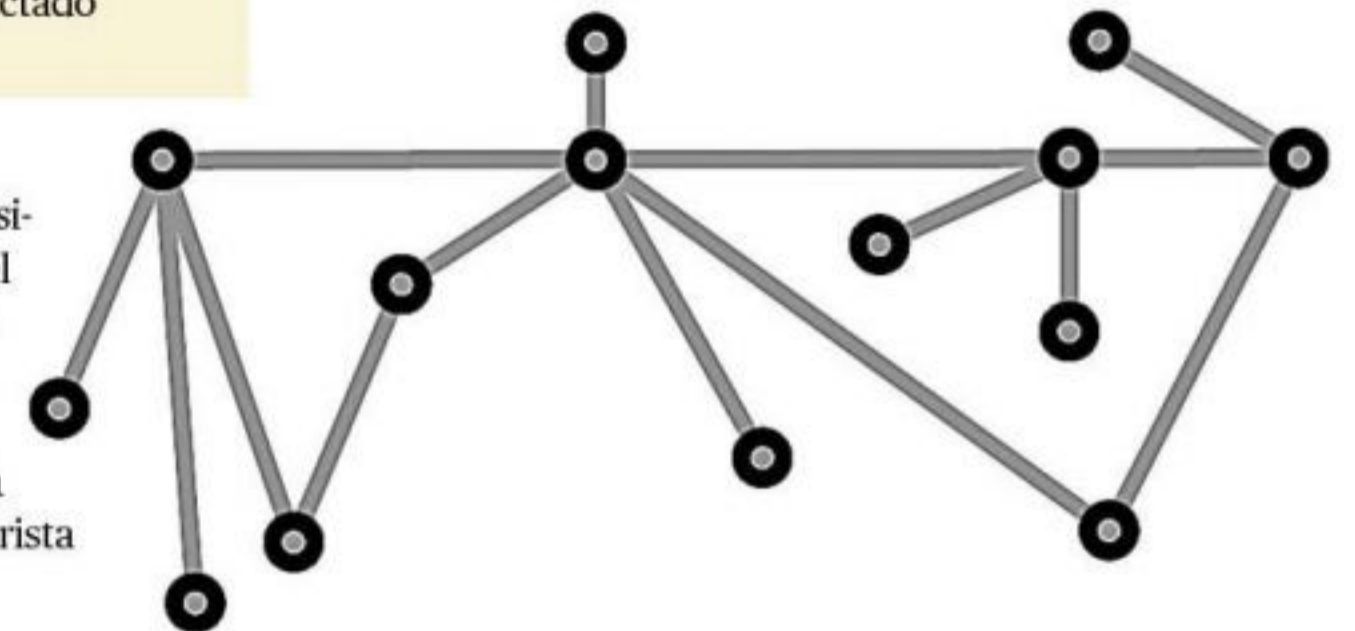
Matemática y Criptografía



### Qué pequeño es el mundo!

Un grafo es una herramienta matemática compuesta por nodos y conexiones entre estos nodos llamadas aristas. Generalmente, utilizamos un esquema para representar un grafo como en la figura. Puedes ver que en un grafo no siempre dos nodos están conectados, también es posible que un nodo esté conectado con varios nodos a la vez o conectado con sí mismo.

Mediante los grafos es posible representar distintas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, el mapa del metro de Santiago es un grafo, donde los nodos son las estaciones y sus aristas las líneas que conectan una estación con otra. El árbol genealógico de tu familia también es un grafo, donde cada miembro de tu familia sería un nodo y dos nodos están conectados por una arista si tienen la relación de padre-hijo.



Veamos una aplicación mucho más interesante. Utilicemos un grafo para caracterizar la red de contactos de Facebook, de forma que todas las personas que tienen una cuenta de Facebook serán representadas por nodos, y existirá una arista entre un nodo y otro si son amigos en la red social. Podemos definir la distancia entre los nodos A y B de este grafo, como la cantidad de contactos por los que debo pasar desde el nodo A hasta llegar al nodo B. Por ejemplo, si Pedro es tu amigo en Facebook y Alicia es amiga de Pedro (pero no lo es tuya), la distancia entre tú y Alicia es 1. Ahora supongamos que

calculamos la distancia entre todos los nodos de este grafo y llamemos diámetro a la mayor de estas distancias. Obviamente, si el diámetro del grafo es pequeño eso indicará que existen muchas conexiones entre nodos. En este contexto, a fines del año 2011, Ugander et al. publicó el artículo titulado The anatomy of the Facebook social graph donde expone que el diámetro del grafo de esta red es 4,7. Esto significa que entre dos personas cualquiera que tienen una cuenta de Facebook sólo es necesario pasar por 4 contactos para llegar de una a la otra, que pequeño es el mundo ¿cierto?

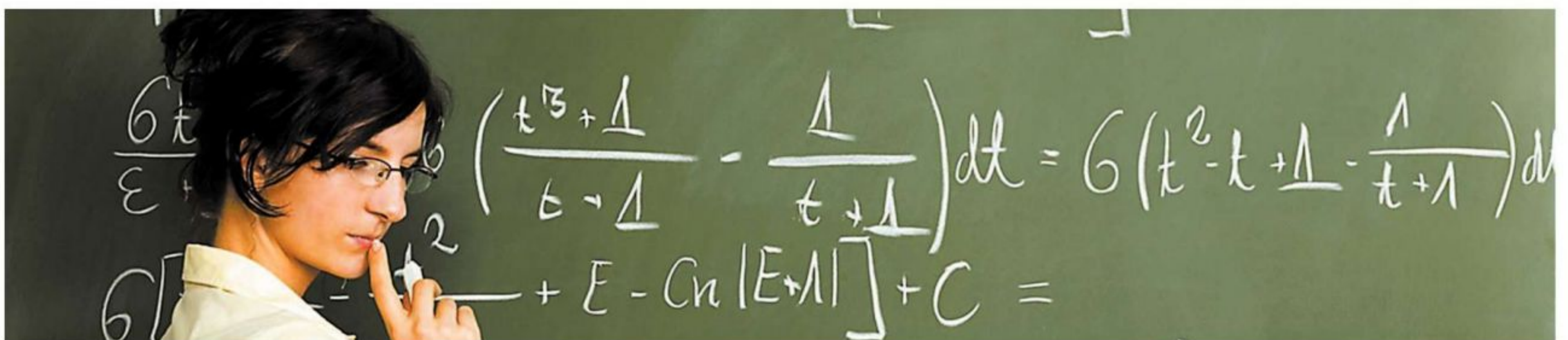
## Problemas Cuarta Fecha

Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera Canguro 2013  
dme.ufro.cl/cpmat

**Problema 1 La Foto.** Laura, Iván, Valeria y Cata quieren estar en una foto juntos. Cata y Laura son las mejores amigas y quieren estar juntas. Iván quiere estar junto a Laura porque le gusta.  
*¿De cuántas formas pueden acomodarse para la foto?*

**Problema 2 Pares e Impares.** Escribe todas las secuencias de números enteros consecutivos que contengan al número 7 de tal forma que la razón entre números impares y números pares es  $\frac{2}{3}$ . Ten en cuenta que una razón es la comparación de dos cantidades, por ejemplo si en tu curso hay 16 niños y 20 niñas, la razón entre los niños y las niñas es  $\frac{16}{20}$  o bien  $\frac{4}{5}$ .

**Problema 3 Piensa un Número.** Miguel pensó en un número positivo, lo multiplicó por sí mismo, le sumó 1, multiplicó el resultado por 10, le sumó 3, luego multiplicó el resultado por 4 y después le sumó 1. Su último resultado fue 2013.  
*¿En qué número pensó Miguel?*



**Problema 4 La Pelota.** Una pelota de caucho cae verticalmente desde una altura de 10 metros (del techo de una casa). Después de cada impacto con el piso rebota para arriba hasta una altura de  $\frac{4}{5}$  de la altura anterior.  
*¿Cuántas veces aparecerá la pelota enfrente de una ventana regular cuyo borde inferior tiene una altura de 5m y cuyo borde superior tiene una altura de 6m?*

**Problema 5 La Canasta.** Un globo lleno de helio puede alzar una canasta que contiene cosas que pesan a lo más 80 kilos. Dos globos llenos de helio pueden alzar la misma canasta que contiene cosas que pesan a lo más 180 kilos.  
*¿Cuánto pesa la canasta?*

**Problema 6 Números y Casas.** El número de la casa de Ariel tiene cuatro dígitos. Si se remueve el primer dígito de este número se obtiene el número de la casa de Benjamín. Si se remueve el primer dígito del número de la casa de Benjamín, se obtiene el número de la casa de Clara. Si se suman los de las casas de Ariel, Benjamín y Clara se obtiene 5992. *¿Cuál es el número de la casa de Ariel si la suma de los dígitos de dicho número es 19?*



**Problema 7** **Último Dígito.** Encuentre el último dígito (la cifra de las unidades) del número

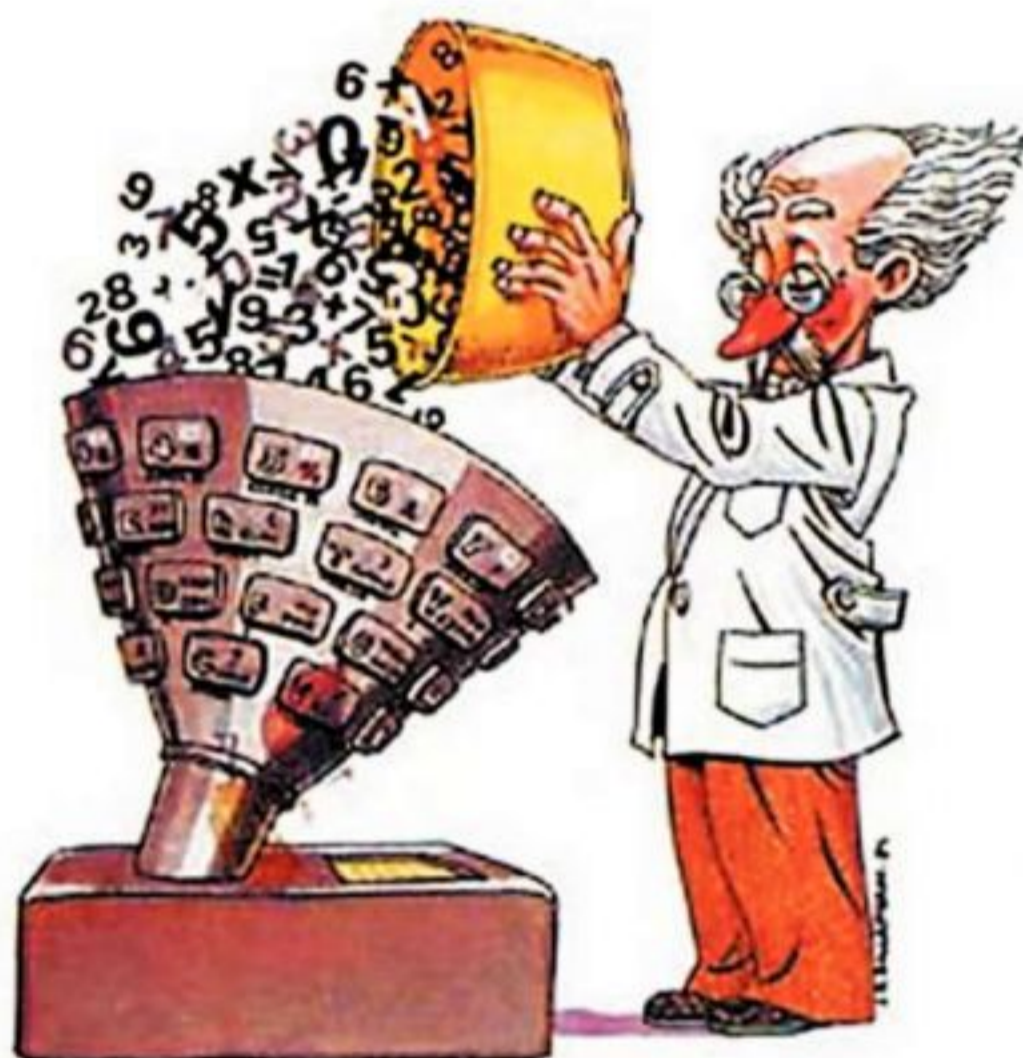
$$5^{2013} + 4^{2013}$$

**Problema 10** **Algoritmo.** Julián ha escrito un algoritmo con el fin de crear una secuencia de números como

$$a_1 = 1, \quad a_{m+n} = a_n + a_m + n \cdot m$$

donde  $m$  y  $n$  son números naturales. Encuentre el valor de  $a_{2013}$ .

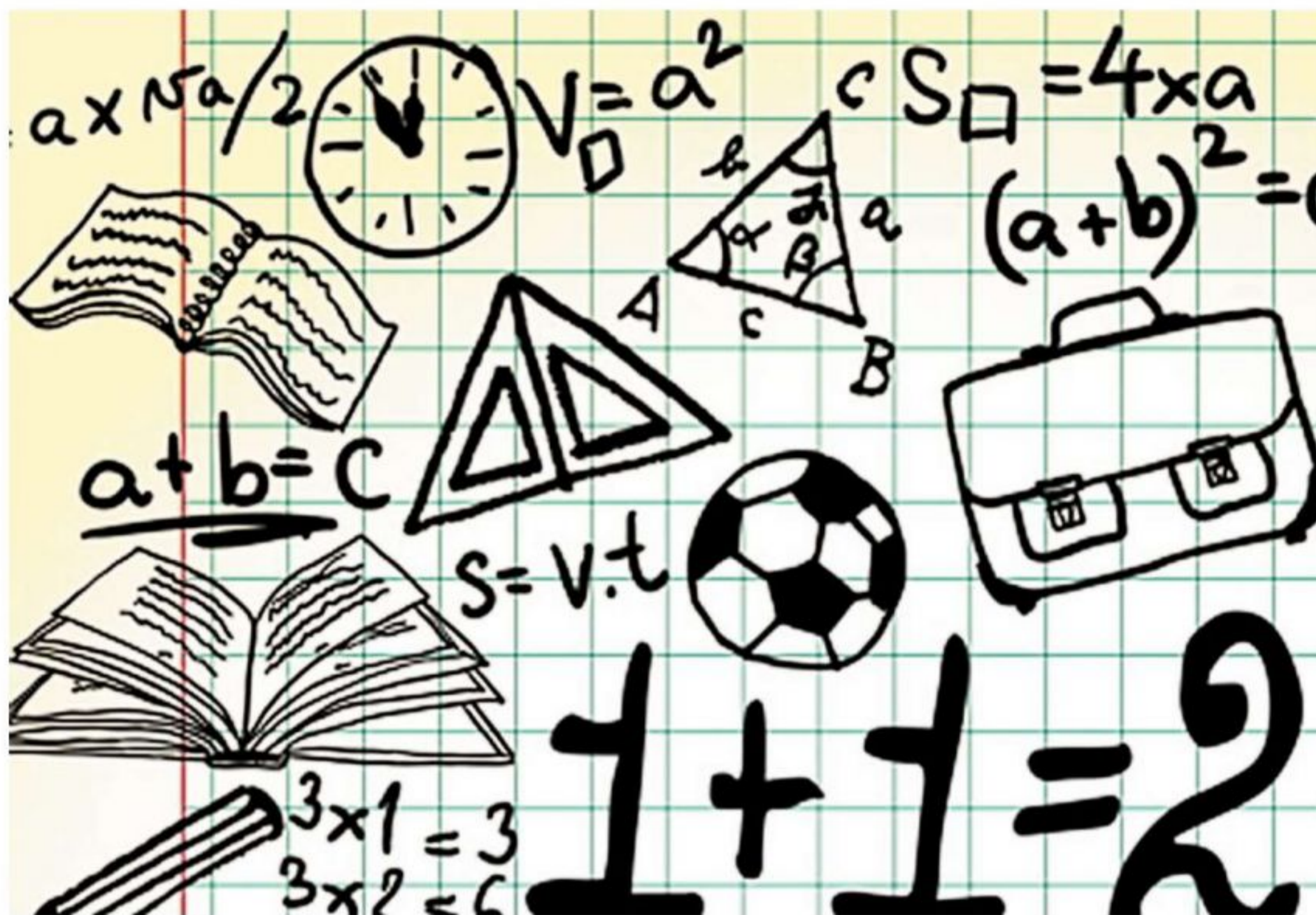
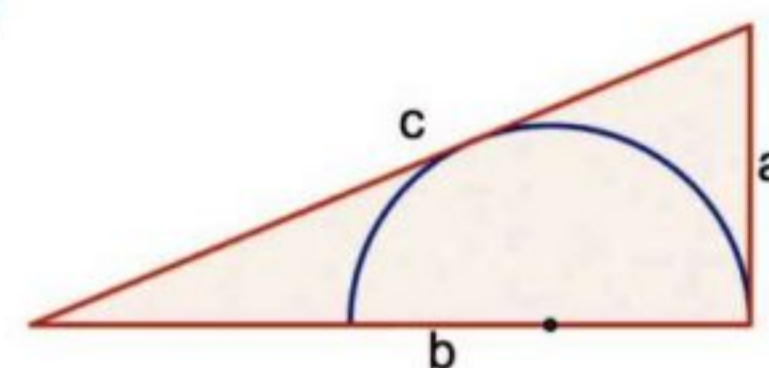
**Problema 11** **Clase de Álgebra.** Después de una lección de Álgebra, en la pizarra quedó lo siguiente: el gráfico de la función  $y = x^2$ , y 2013 rectas paralelas a la recta  $y = x$  que cortan al eje  $y$  en  $1, 2, \dots, 2013$ , cada una de las cuales intersecta al gráfico de la parábola en dos puntos, generando así 4026 puntos. Calcular la suma de las abscisas de estos 4026 puntos de intersección.



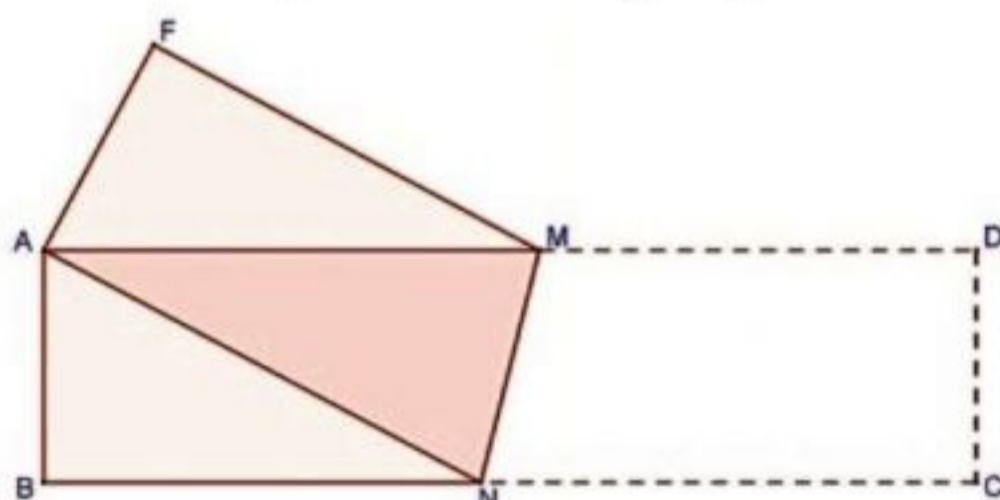
**Problema 14** **Cubo.** Tres vértices de un cubo (no todos sobre la misma cara) son  $P(3, 4, 1), Q(5, 2, 9)$  y  $R(1, 6, 5)$ . Encuentra el centro del cubo.

**Problema 8** **Bailando Tango.** El baile del tango se baila en parejas, cada una formada por un hombre y una mujer. Una noche en un baile no hay más de 50 personas presentes. En algún momento  $\frac{3}{4}$  de los hombres están bailando con  $\frac{4}{5}$  de las mujeres. ¿Cuántas personas están bailando en ese momento?

**Problema 9** **El Radio.** La figura de la derecha muestra un triángulo rectángulo de lados  $a, b$  y  $c$ . ¿Cuál es el radio del semicírculo inscrito?



**Problema 12** **Hoja de Papel.** Un pedazo de papel rectangular  $ABCD$  que mide  $4\text{cm} \times 16\text{cm}$  se dobla sobre la recta  $MN$  de tal forma que el vértice  $C$  coincida con el vértice  $A$ , como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del pentágono  $ABNMF$ ?



**Problema 13** **La Suma.** El abuelo Anacleto matemático jubilado y aventurero suma de los primeros  $n$  enteros positivos (consecutivos) hasta obtener un número de 3 dígitos donde todos los dígitos son iguales. ¿Cuántos números sumó el abuelo?

**Problema 15** **La Pequeña Suma.** Los números  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  y  $10$  están escritos alrededor de un círculo en orden arbitrario. Sumamos todos los números con sus vecinos, obteniendo diez sumas. ¿Cuál es el máximo valor posible para la más pequeña de estas sumas?

**Problema 16** **Dígitos.** Juan elige un entero positivo de 5 cifras y borra uno de sus dígitos para convertirlo en un número de 4 cifras. La suma de este número de 4 cifras y del de 5 cifras es 52713. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original de 5 cifras?

## Solución

**Problema 1** Existen 4 formas de acomodarse para la foto.

**Problema 2** Se tiene que las únicas soluciones posibles son  $\{4, 5, 6, 7, 8\}$  y  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

**Problema 3** Miguel pensó en el número 7.

**Problema 4** La pelota de caucho aparece frente a la ventana 5 veces.

**Problema 5** El peso de la canasta es 20 kilos.

**Problema 6** El número de la casa de Ariel  $abcd$  es 5464.

**Problema 7** La cifra de las unidades de  $5^{2013} + 4^{2013}$  es  $5 + 4 = 9$ .

**Problema 8** Hay 31 personas de las cuales 24 están bailando.

**Problema 9**  $r = \frac{a(c-a)}{b}$ .

**Problema 10** El valor del número buscado  $a_{2013}$  es 2027091.

**Problema 11** La suma de todas las abscisas de los 4026 puntos de intersección será 2013.

**Problema 12** El área del pentágono  $ABNMF = 32 + 15 = 47\text{cm}^2$

**Problema 13** Por lo tanto el abuelo Anacleto sumó una cantidad de 36 números.

**Problema 14**  $C(4, 3, 5)$

**Problema 15** El máximo valor posible es 15.

**Problema 16** La suma de los dígitos del número original es 23.

