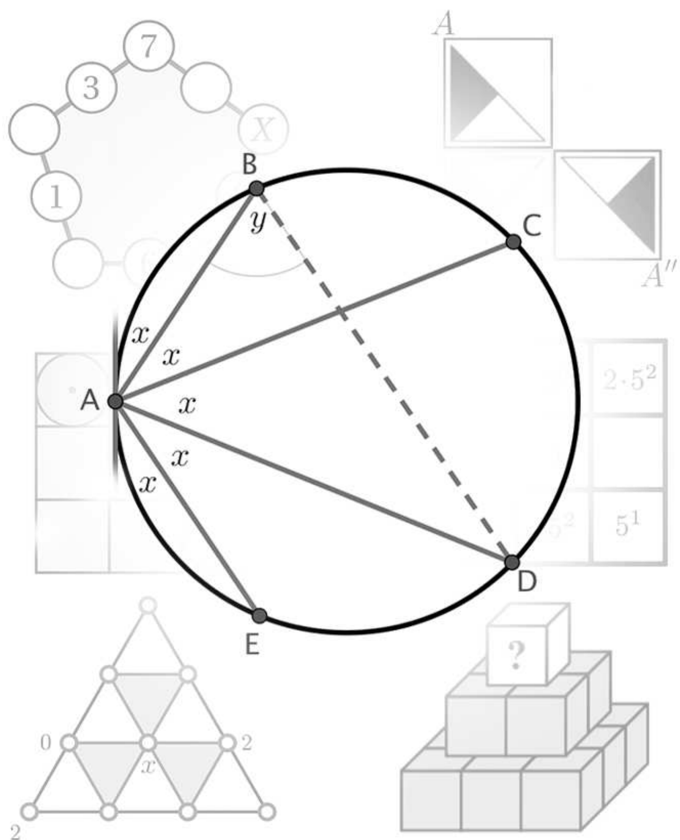
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

10° Campeonato de Matemática Universidad de La Frontera



Dr.Hernán Burgos Vega
Director Académico Campeonato de Matemática

UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

El objetivo principal del matemático
consiste en formular y resolver problemas

"La resolución de problemas
es el corazón de la Matemática"

Soluciones de los Problemas a cargo del
Comité Académico del Campeonato Conformado por:

Hernán Burgos Vega
José Labrin Parra
Eduardo Milman Aguilar
Joan Molina Sandoval

Introducción

Este pequeño libro contiene los problemas del 10° Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera año 2017, junto a sus soluciones, material que ponemos a disposición de cada uno de los colegas con la íntima esperanza y pretensión de que les sirvan de ayuda y motivación en sus clases de matemática.

Estamos convencidos de que estudiantes entusiasmados y motivados tendrán mayor éxito, como también, pensamos que problemas no triviales y que desafían el intelecto del estudiante lo ayudan a organizar, contar, razonar, encontrar secuencias y algoritmos que le permiten entender los problemas y resolverlos, y al final del proceso sentir el placer de haber resuelto un problema novedoso, que inicialmente era un desafío.

Este libro está dirigido especialmente a los colegas profesores de matemática de enseñanza básica y media de la región de La Araucanía, con el propósito de despertar el interés por la resolución y creación de problemas lúdicos y bonitos que motivan a nuestros estudiantes.

Quiero agradecer el importante aporte del comité académico del campeonato, en la resolución de los problemas seleccionados, debemos reconocer también el trabajo desarrollado por el profesor José Labrin en la escritura del texto en LaTeX.

Finalmente, es necesario destacar y reconocer el importante y decidido apoyo que nos entrega la dirección de nuestra Universidad, sin el cual no podríamos desarrollar este Campeonato.

Reiteramos nuestro íntimo deseo de que este material sea un pequeño aporte a los colegas en su práctica diaria.

Hernán Burgos Vega

Temuco, Marzo 2018

1

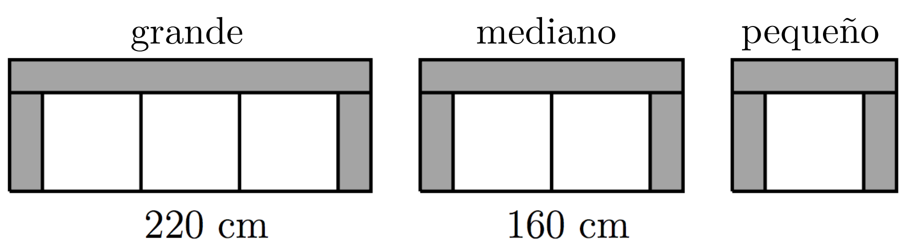
Problemas

Problema 1. Una mosca tiene seis patas y una araña tiene ocho. Si hay tres moscas y dos arañas estas tienen tantas patas como nueve pollos y algunos gatos. ¿Cuántos son estos gatos?

Problema 2. Un dado especial tiene un número en cada cara. Las sumas de los números en las caras opuestas son todas iguales. Cinco de los números son 5, 6, 9, 11 y 14. ¿Cuál es el número que está en la sexta cara?

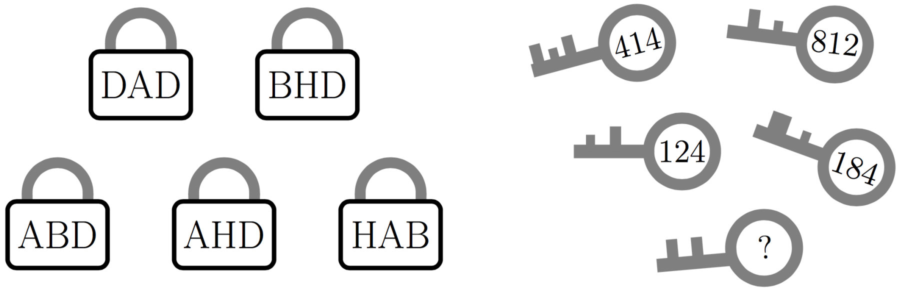
Problema 3. Mientras que Pedro resuelve dos problemas en el campeonato de matemática, Ernesto logra solucionar tres problemas. Los estudiantes resolvieron 30 problemas en total. ¿Cuántos problemas resolvió Ernesto más que Pedro?

Problema 4. Una tienda de muebles vende sofás grandes, sofás medianos y sofás pequeños, hechos de piezas idénticas como se muestra en la figura, incluyendo los apoyabrazos, el ancho del sofá grande es de 220 cm y el ancho del sofá mediano es de 160 cm.



¿Cuál es el ancho del sofá pequeño?

Problema 5. Cada una de las 5 llaves de la figura pertenece a alguno de los 5 candados. Cada número que aparece en una llave corresponde a una de las letras de los candados. ¿Cuál es el número escrito en la última llave?

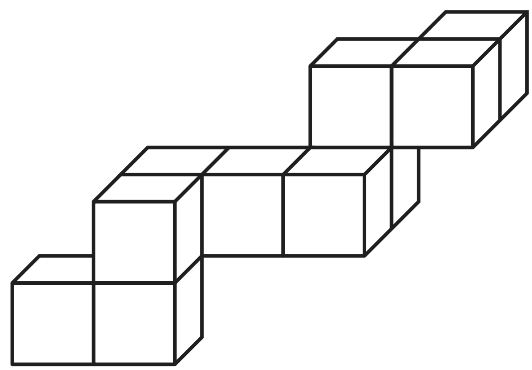


Problema 6. Tomás escribe los primeros 20 números naturales uno tras otro (sin espacio entre ellos) y obtiene el siguiente número de 31 dígitos:

$$1234567\ldots181920.$$

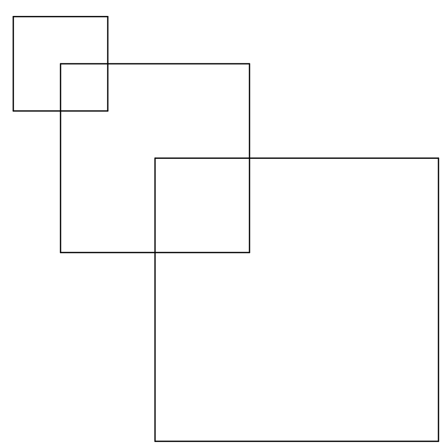
Luego, elimina 24 de los dígitos de este número de tal manera que el nuevo número sea lo más grande posible. Si Tomás no desordena los números. ¿Qué número obtiene?

Problema 7. Matías ha pegado algunos cubos de lado 1 cm y ha formado el sólido de la figura. Matías desea poner su construcción dentro de una caja. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más pequeña que Matías puede usar?



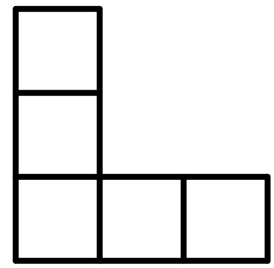
Problema 8. Benjamín fue de excursión a la montaña y caminó durante 5 días. Comenzando el lunes, Benjamín caminó 2 kilómetros más que el día anterior. Cuando terminó su viaje, en total recorrió 70 kilometros. ¿Cuánto caminó el jueves?

Problema 9. Rafael tiene tres cuadrados. El primero es de lado 2 cm. El segundo es de lado 4 cm y un vértice en el centro del primer cuadrado. El último es de lado 6 cm y un vértice colocado en el centro del segundo cuadrado, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el área de la figura?



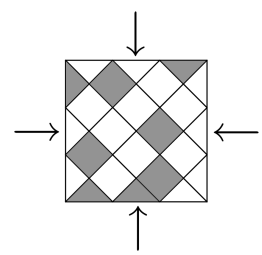
Problema 10. Cuatro jugadores juegan un partido de handball. Todos ellos anotaron un número diferente de goles. De los cuatro jugadores, Javier fue el que marcó el menor número de goles. Los otros tres suman un total de 20 goles. ¿Cuál es el mayor número de goles que Javier pudo haber anotado?

Problema 11. Los números 1, 2, 3, 4 y 5 tienen que escribirse en las cinco celdas de la figura de la siguiente manera: Si un número está justo debajo de otro número, tiene que ser menor, si un número está justo a la derecha de otro número, tiene que ser mayor. ¿De cuántas maneras esto se puede hacer?



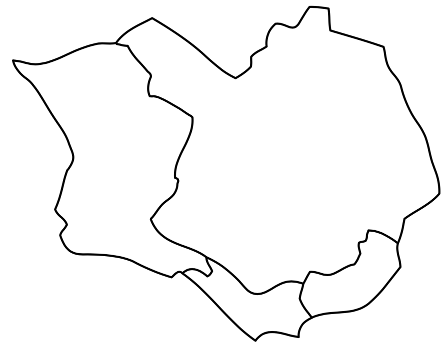
Problema 12. Mónica tiene 5 números diferentes a, b, c, d y e. Ella quiere multiplicar algunos de ellos por 2 y otros por 3 y el resto por 1, con el fin de obtener el menor número de resultados diferentes. ¿Cuál es el menor número de resultados distintos que ella puede obtener?

Problema 13. El piso cuadrado en la imagen está cubierto por baldosas triangulares y cuadradas de colores gris o blanco. ¿Cuál es el menor número de baldosas grises que deben ser intercambiadas con baldosas blancas de manera que el patrón parezca el mismo en cada una de las direcciones mostradas?



Problema 14. Una bolsa contiene sólo bolitas rojas y verdes. Si elegimos 5 bolitas al azar, es seguro que por lo menos una es roja y si elegimos 6 bolitas al azar, es seguro que por lo menos una es verde. ¿Cuál es el mayor número de bolitas que la bolsa puede contener?

Problema 15. A Alejandra le gustan los números pares, a Bárbara le gustan los números divisibles por 3 y a Camila le gustan los números divisibles por 5, ellas tienen una bolsa que contiene 8 bolas con números escritos en estas. Cada una saca de la bolsa todas las bolas con los números que le gustan. Y resulto que Alejandra tomo los números 32 y 52, Bárbara tomo los números 24, 33 y 45, Camila tomó los números 20, 25 y 35. ¿Cuál es el orden en que cada una se acercó a la cesta?

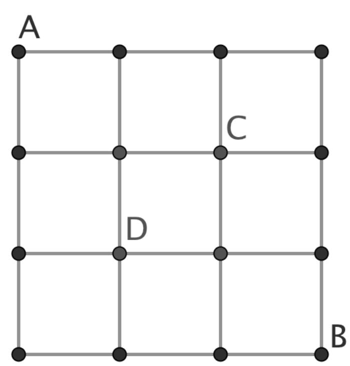


Problema 16. Julia tiene cuatro diferentes lápices de colores y quiere utilizar la totalidad o parte de ellos para pintar el mapa de la isla, que está dividido en cuatro naciones, como se muestra en la figura.

Si el mapa de dos naciones con una frontera en común no puede tener el mismo color. ¿De cuantas maneras puede pintar ella el mapa de la isla?

Problema 17. En cada celda de un tablero 6×6 hay una lámpara. Decimos que dos lámparas en este tablero son vecinas si se encuentran en celdas con un lado común. Inicialmente se encienden algunas lámparas, y luego, por cada minuto transcurrido, se enciende cada lámpara que tiene al menos dos lámparas vecinas iluminadas, ¿cuál es el número mínimo de lámparas que deben encenderse inicialmente para asegurarse de que en algún momento todas las lámparas se encenderán?

Problema 18. Una hormiga tiene que ir del vértice A al vértice B, pasando obligatoriamente a alimentarse en el punto C o bien en D, la hormiguita sólo viaja por los lados de los cuadraditos y sólo puede ir hacia abajo y hacia hacia la derecha. ¿Cuántos caminos distintos puede hacer la hormiga?

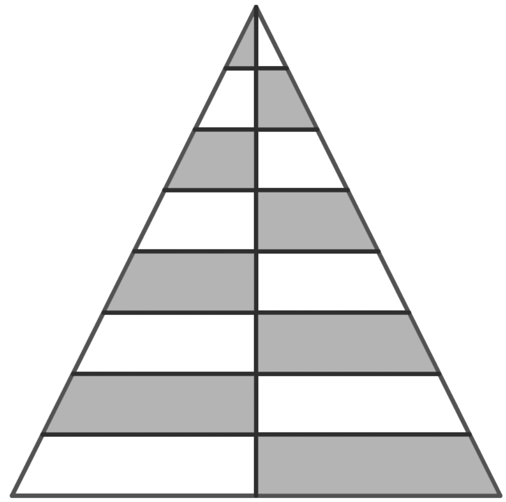


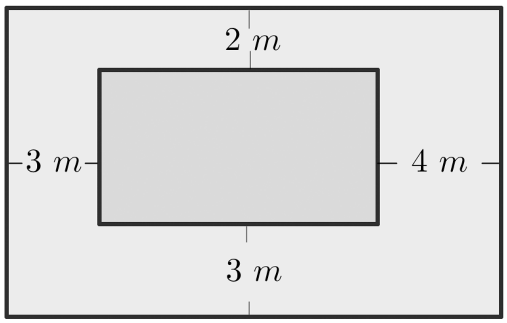
Problema 19. ¿Qué hora serán 17 horas después de las 17:00?

Problema 20. Un grupo de chicas están formando un círculo. Carla es la cuarta a la izquierda de Sofía y la séptima a la derecha de Sofía. ¿Cuántas chicas están en el grupo?

Problema 21. ¿Qué número debe sustraerse a (-17) para obtener (-33)?

Problema 22. La siguiente imagen muestra un triángulo isósceles y su altura. Si cada región achurada tiene la misma altura. ¿Qué porcentaje del área del triángulo es el área de la región no achurada?





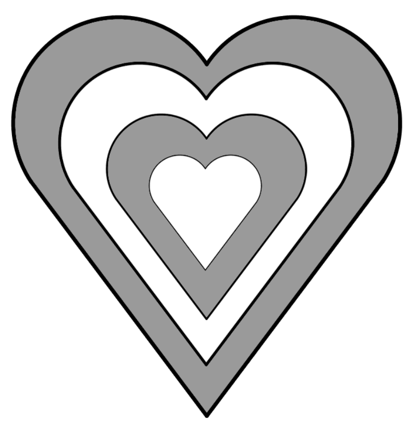
Problema 23. El siguiente diagrama muestra dos rectángulos de lados parelelos entre sí, uno dentro de otro. ¿Cuál es la diferencia de los perímetros en los dos rectángulos?

Problema 24. En cuantos ceros termina el Número $N = 3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21 \times \ldots \times 99$

Problema 25. La suma de 3 números positivos enteros distintos es 7. ¿Cuál es el producto de estos 3 números?

Problema 26. Juan tiene 20 canguromonedas. Si Juan tiene 4 hermanos con 10 canguromonedas cada uno. ¿Cuántas canguromonedas tendrá que dar Juan a cada uno de sus hermanos para que los 5 hermanos tengan igual cantidad de canguromonedas?

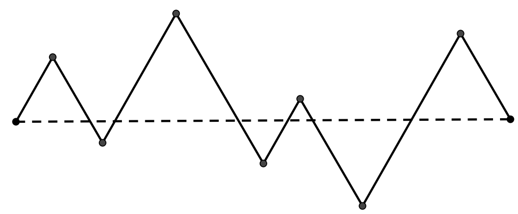
Problema 27. El diagrama muestra 4 corazones superpuestos. Si las áreas de los corazones son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2, 16 cm^2 respectivamente. ¿Cuál es el área sombreada?



Problema 28. Un sexto de la audiencia de un teatro son adultos. Dos quintos son niños. ¿Qué fracción de la audiencia son niñas?

Problema 29. Camila la hormiga comienza a caminar desde el extremo izquierdo de un poste horizontal y avanza 2/3 de este hacia la derecha. Paty la chinita parte desde el extremo derecho del poste y avanza 3/4 de este hacia la izquierda. ¿A qué distancia están Camila y Paty en relación al tamaño del poste?

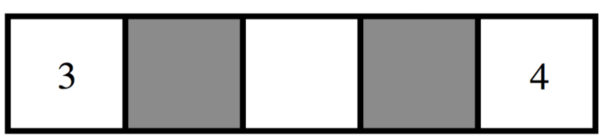
Problema 30. En el diagrama, la línea puntuada y la línea negra forman 7 triángulos equiláteros. Si la longitud de la línea puntuada es de 20cm. ¿Cuál es la longitud de la línea negra?



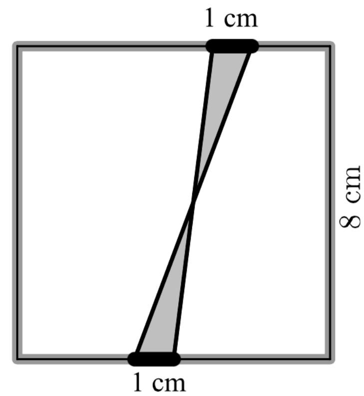
Problema 31. Cuatro primas Sonia, Susana, Teresa y Valentina son de 3, 8, 12 y 14 años de edad, no necesariamente en ese orden. Sonia es más joven que Teresa, la suma de las edades de Sonia y Valentina es divisible por 5. La suma de las edades de Teresa y Valentina también es divisible por 5. ¿Cuál es la edad de Susana?

Problema 32. Este año hay más de 800 participantes en la carrera del canguro. Si exactamente un 35 % de los corredores son mujeres y hay 242 hombres más que mujeres. ¿Cuántos corredores hay en total?

Problema 33. Rita busca escribir un número en cada casilla del diagrama. En las casillas ya han sido escritos dos números Ella busca que la suma de todos los números sea igual a 35, la suma de los tres primeros números sea igual a 22 y la suma de los 3 últimos números sea igual a 25. ¿Cuál es el producto de los números en las dos casillas achuradas?



Problema 34. Simón quiere cortar un trozo de hilo en nueve partes de igual longitud y marca con un lapiz sus puntos de corte. Bárbara quiere cortar el mismo trozo de hilo pero en ocho partes de igual longitud y marca sus puntos de corte. Carlos toma el hilo y corta todos los puntos marcados. ¿Cuantos trozos de hilo obtiene Carlos?



Problema 35. Dos segmentos, cada uno de 1 cm de longitud, son marcados en los lados opuestos de un cuadrado de arista 8cm. El final de los segmentos se une como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el área achurada en cm^2?

Problema 36. Joaquín quiere preparar su horario para poder salir a correr. Él quiere correr exactamente dos veces a la semana y los mismos días cada semana. Si nunca va a correr dos días consecutivos. ¿Cuántas formas distintas tiene para ordenar su horario?

Problema 37. Emilia quiere escribir un número en cada casilla de un tablero de 3×3, tal que la suma de los números de dos celdas cualesquiera que compartan un lado sea la misma. Si ella ya ha escrito dos números como se muestra en el diagrama. Si los números de la tabla no son necesariamente distintos ¿Cuál será la suma de los números?

2		
		3

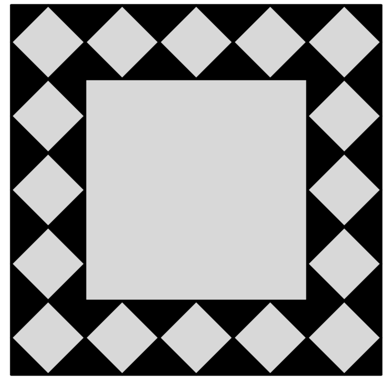
Problema 38. Un triángulo tiene tres ángulos diferentes. Si todos los ángulos son enteros. ¿Cuál es la mínima suma del mayor y el menor ángulo?

Problema 39. Diez canguros se encuentran en una línea como se muestra en la figura. Los canguros que se encuentran frente a frente se saludan saltando unos sobre otros, intercambiando sus posiciones. Si esto se repite todas las veces posibles. ¿Cuántos saludos se hicieron?

Problema 40. Diana tiene nueve números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Diana suma 2 a algunos de ellos y 5 a todos los demás. ¿Cuál es el menor número de resultados distintos que puede obtener?

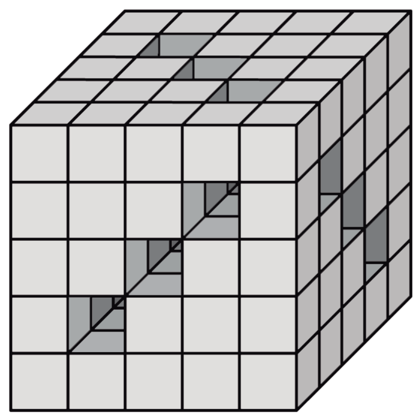
Problema 41. En un aeropuerto salen buses cada 3 minutos hacia el centro de la ciudad. Un auto sale del aeropuerto al mismo tiempo que un bus, ambos en dirección al centro de la ciudad y por la misma ruta. Se sabe que le toma 60 minutos a un bus y 35 minutos a un auto llegar al centro de la ciudad. Si se excluye el bus con el cual el auto salió del aeropuerto. ¿A cuántos buses alcanza el auto, en su camino, antes de llegar al centro de la ciudad?

Problema 42. El mantel de Eduardo tiene un patrón regular, como se muestra en la figura. ¿Qué porcentaje del mantel es negro?



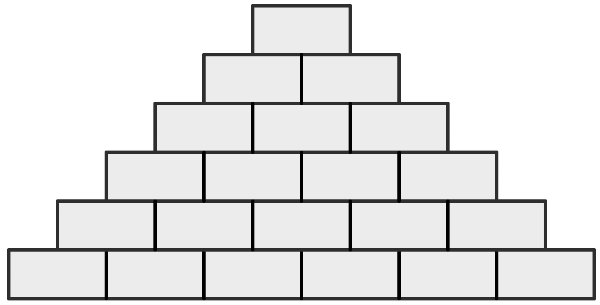
Problema 43. Una secuencia comienza de la siguiente manera: 2, 3, 6, 8, 8, en donde el primer número es 2 y el segundo es 3. Luego, cada número de la secuencia corresponde a la cifra de las unidades del producto de los 2 números anteriores de la secuencia. ¿Cuál es el número que ocupa la posición 2017 en la secuencia?

Problema 44. Juan tiene 125 cubos pequeños. Él pegó alguno de ellos para formar un cubo grande con 9 túneles que le atraviesan de un lado a otro (como se muestra en la figura). ¿Cuál es la menor cantidad de cubos pequeños que no uso?

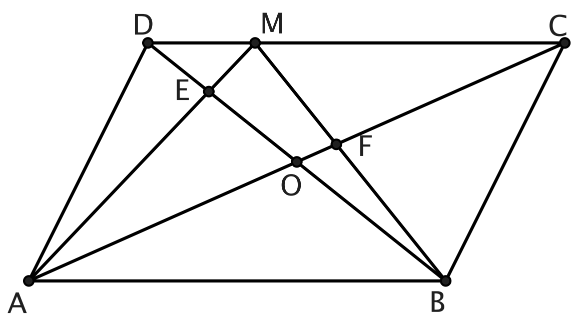


Problema 45. Matías y Nicolás corren en direcciones opuestas en una pista circular de 720 metros, partiendo desde un mismo punto. Nicolás tarda 4 minutos en completar una vuelta, mientras que Matías tarda 5 minutos. Luego de comenzar a correr, cada vez que se encuentran en la pista, estos se saludan. Después del segundo saludo, ¿Cuántos metros debe recorrer Matías para llegar al punto de inicio?

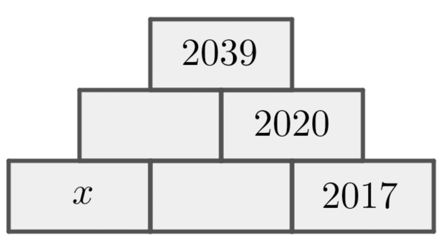
Problema 46. Pablo quiere escribir un número natural en cada casilla del diagrama de tal manera que cada número sea la suma de los dos números en las casillas inmediatamente inferiores. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares que puede escribir Pablo?



Problema 47. La figura muestra un paralelogramo $ABCD$ con área S. La intersección de las diagonales del paralelogramo es el punto O. El punto M está sobre DC. En la intersección de AM con BD está el punto E y en la intersección de BM con AC está el punto F. Si la suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $S/3$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$, en términos de S?



Problema 48. En el diagrama, cada número es la suma de los dos números inferiores a él. ¿Cuál debe ser el valor de x?



Problema 49. Angela hizo una decoración con asteroides bicolores (gris y blanco). Las áreas de los asteroides son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2 . ¿Cuál es el área total de las partes grises visibles?

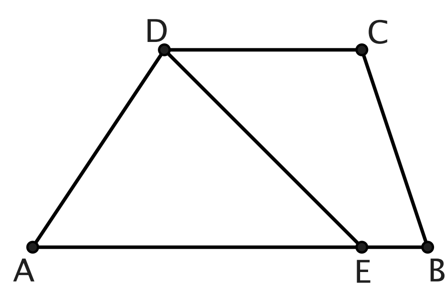
Problema 50. Martin juega ajedrez. Ha jugado 15 partidos esta temporada, de los cuales ha ganado 9 y aún le quedan 5 más por jugar. Si gana todos los restantes. ¿Cuál será su porcentaje de victoria?

Problema 51. Algunas chicas danzan en un círculo. Antonia es la quinta a la izquierda de Blanca y la octava a la derecha de Blanca. ¿Cuantas chicas hay en el círculo?

Problema 52. En una boda, un octavo de los invitados son niños/as. Tres séptimos de los invitados adultos son hombres. ¿Qué fracción de los invitados adultos son mujeres?

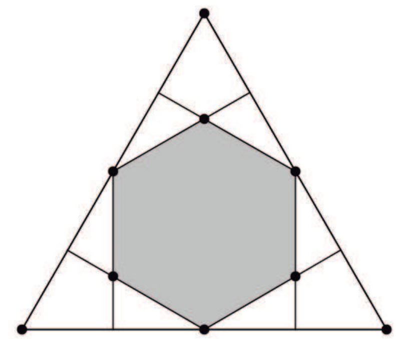
Problema 53. El profesor Gonzalez tiene una caja con botones de colores. La caja tiene 203 botones rojos, 117 blancos y 28 azules. El pide a sus estudiantes que tome un botón de la caja sin mirar. ¿Cuantos estudiantes tienen que tomar un botón para asegurar que se han extraído al menos 3 botones del mismo color desde la caja?

Problema 54. $ABCD$ es un trapecio con lados AB paralelo a CD, donde AB es 50 y CD es 20. E es un punto en AB que divide al trapecio en dos polígonos de igual área. Calcule la longitud de AE.



Problema 55. ¿Cuantos números n poseen la propiedad que exactamente uno de los números n o $n + 20$ sea de 4 dígitos?

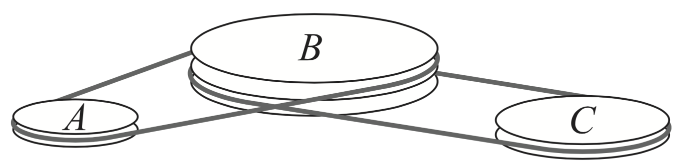
Problema 56. Para cada lado del triángulo de la figura se ha trazado el segmento desde el punto medio del lado que corta perpendicularmente al lado adyacente. ¿Qué fracción del área del triángulo inicial es el área del hexágono resultante?



Problema 57. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos enteros positivos es 770. ¿Cuál es el mayor de estos tres números?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Problema 58. Un sistema de transmisión por correa está formado por los discos giratorios A, B y C.



Cuando B completa 4 vueltas, A completa 5 y cuando B completa 6 y C completa 7 vueltas. Si el perímetro de C es 30 cm, ¿Cuál es el perímetro de A?

Problema 59. Cuatro hermanos tienen diferentes alturas: Tobías es más bajo que Víctor por la misma longitud por la que él es más alto que Pedro. Oscar es más bajo que Pedro por la misma longitud también. Tobías mide 184 cm de alto y la estatura promedio de los cuatro hermanos es de 178 cm. ¿Cuál es la estatura de Oscar?

Problema 60. Llovio 7 veces en las vacaciones. Si llovía por la mañana estaba soleado en la tarde y si llovía en la tarde había sol en la mañana. Si hubo 5 mañanas soleadas y 6 tardes soleadas. ¿Cuánto duraron las vacaciones?

Problema 61. Jenny decidió introducir números en las casillas de la tabla de 3×3 para que las sumas de los números en los cuatro cuadrados de 2×2 sean iguales. Los tres números en las casillas de la esquina ya se han escribo como se muestra en la figura. ¿Qué número debería escribir en la cuarta esquina marcada con x?

1		3
2		x

Problema 62. Siete números naturales a, b, c, d, e, f y g se escriben en una fila. La suma de todos ellos es igual a 2017. Cualesquiera dos números vecinos difieren en ± 1. ¿Cuál de los números pude ser igual a 286?

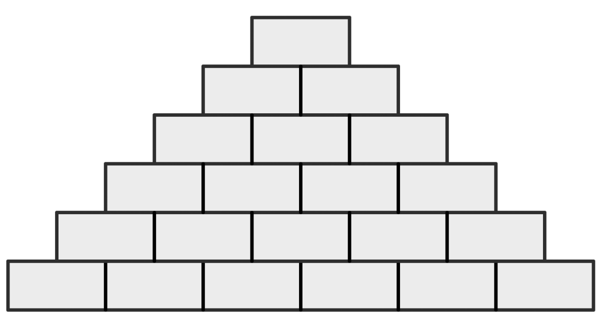
Problema 63. Hay cuatro niños con edades enteras menores a 18 años y diferentes entre sí. El producto de sus edades es 882. ¿Cuál es la suma de sus edades?

Problema 64. En la cara de un dado aparecen los números: -3, -2, -1, 0, 1, 2 si se lanza dos veces y se multiplican los resultados, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

Problema 65. Dado un número ab de dos dígitos a y b, al repetir el par de dígitos 3 veces se obtiene un número de 6 dígitos $ababab$. Calcule por que números este número de 6 dígitos es divisible.

Problema 66. Daniel quiere usar una contraseña especial de 7 dígitos. Cada dígito de la contraseña se repite tantas veces como lo indica la misma cifra y estos siempre van de forma consecutiva. Por ejemplo: 4444333 o 1666666. ¿Cuantas contraseñas distintas puede elegir?

Problema 67. Pablo quiere escribir un número natural en cada casilla del diagrama de tal manera que cada número sea la suma de los dos números en las casillas inmediatamente inferiores. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares que puede escribir Pablo?

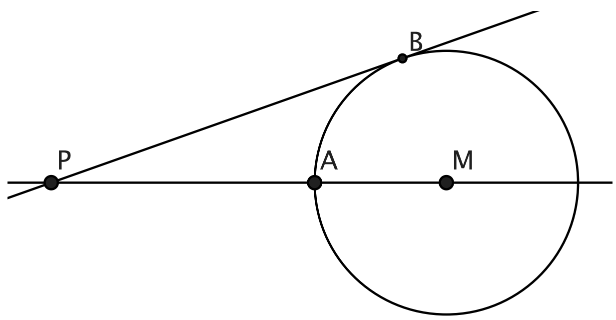


Problema 68. Luisa sumó los ángulos interiores de un polígono convexo. Ella olvidó sumar uno de los ángulos y por eso el resultado fue 2017°. ¿Qué ángulo olvidó Luisa?

Problema 69. Hay 30 bailarines de pie en un círculo, mirando hacia el centro. Cuando se dice "izquierda", algunos bailarines se voltean mirando hacia la izquierda y todos los demás hacia la derecha. Los que estaban frente a frente se saludaron y estos resultaron ser 10. Luego cuando se dice "alrededor", todos los bailarines hicieron media vuelta. ¿Cuántos se saludaron al decir "alrededor"?

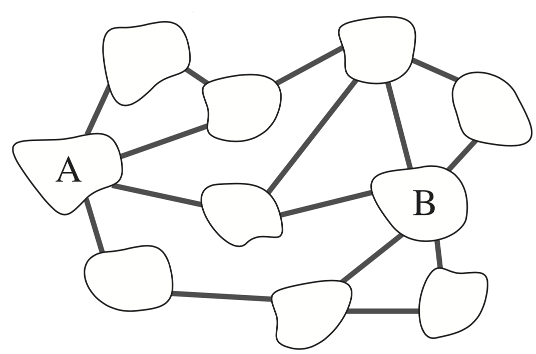
Problema 70. En una balanza se ponen 3 masas de distinto peso en cada lado, estas pesan 101, 102, 103, 104, 105 y 106 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que la masa de 106 gramos este en el lado más pesado?

Problema 71. Los puntos A y B pertencen a una circunferencia de centro M. Dado un punto P exterior a la circunferencia se sabe que PB es tangente a la circunferencia en B y las distancias PA y MB son enteras. Si $PB = PA + 6$, ¿Cuántos valores posibles hay para MB?

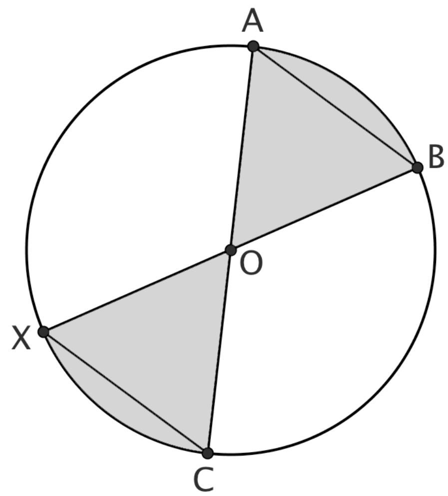


Problema 72. A Vicente le gusta jugar con sus trenes de juguete. Vicente ha moldeado una figura en miniatura de su hermano, empleando la escala 1 : 87 dicha figura mide 2 cm. ¿Cuál es la altura real de su hermano?

Problema 73. En la figura se muestran 10 islas que están conectadas por 15 puentes, donde sólo se puede transitar de una isla a otra por medio de estos. ¿Cuál es el menor número de puentes que deben ser eliminados de manera que sea imposible ir de A hasta B?

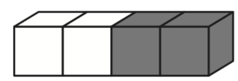


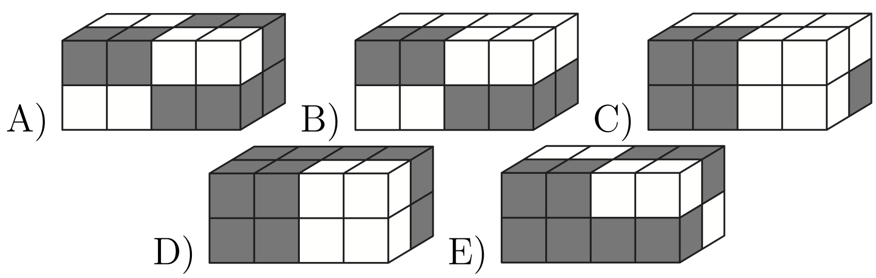
Problema 74. Dos números positivos, a y b, son tales que el 75 % de a es igual al 40 % de b. ¿Cuál es el valor de a con respecto a b



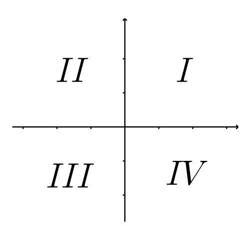
Problema 75. En un círculo con centro en O y diámetro AC se traza el diámetro BX tal que $OA = AB$. ¿Cuál es la porción de área del círculo que está sombreada?

Problema 76. Una barra está compuesta por 2 cubos blancos y 2 cubos grises pegados tales que resulta una barra de $4 \times 1 \times 1$. Ambos cubos blancos fueron pegados en el costado izquierdo de la barra y los cubos grises en el costado derecho, como lo muestra la figura. ¿Qué figura puede ser construida a partir de 4 barras iguales de $4 \times 1 \times 1$?

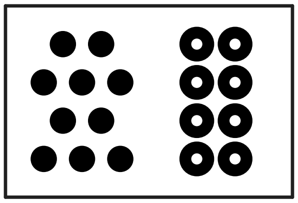
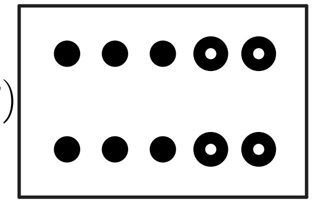
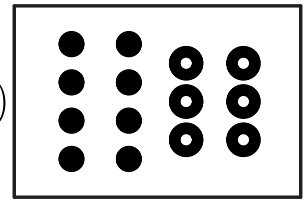


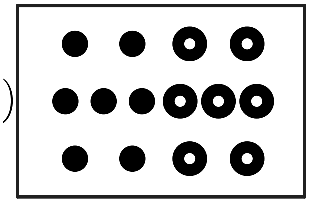
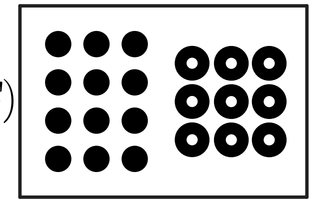


Problema 77. ¿Cuál de los cuadrantes del plano cartesiano no contiene ningún punto de la gráfica de la función lineal $f(x) = -3,5x + 7$?



Problema 78. Cada una de las siguientes cajas contiene pelotas negras y blancas como lo muestra su etiqueta. Daniela quiere extraer una bola de las cajas sin mirar. ¿De qué caja debe extraer la bola de manera que tenga la mayor probabilidad de obtener una de color negro?

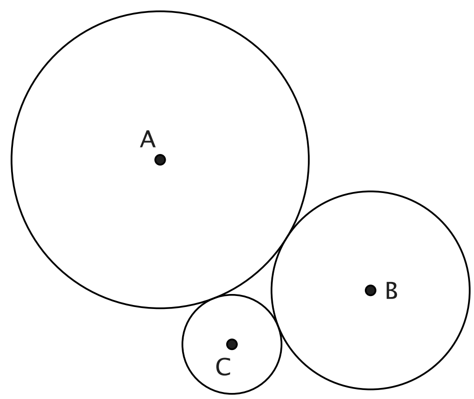
A)  B)  C) 

D)  E) 

Problema 79. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene la mayor cantidad de puntos en común con la función $f(x) = x$?

A) $g_1(x) = x^2$ B) $g_2(x) = x^3$ C) $g_3(x) = x^4$ D) $g_4(x) = -x^4$ E) $g_5(x) = -x$

Problema 80. Tres círculos de centro A, B y C respectivamente son tangentes entre sí y tienen radios 3, 2 y 1 respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$?

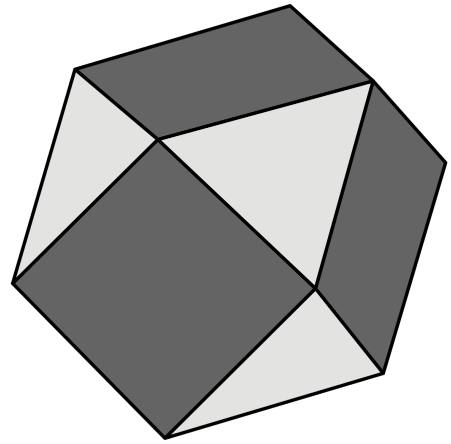


Problema 81. El número positivo p es menor que 1, y el número q es mayor que 1. ¿Cuál de los siguientes números es el más grande?

A) $p \cdot q$ B) $p + q$ C) $\dfrac{p}{q}$ D) p E) q

Problema 82. Dos cilindros A y B tienen el mismo volumen. El radio de la base del cilindro B es $10\,\%$ más grande que el radio de la base del cilindro A. ¿Cuánto más grande es la altura del cilindro A respecto de la altura del cilindro B?

Problema 83. Las caras del poliedro que se muestra en la figura son triángulos o cuadrados. Cada cuadrado está rodeado por 4 triángulos y cada triángulo está rodeado por 3 cuadrados. Si hay 6 cuadrados, determine cuántos triángulos hay.

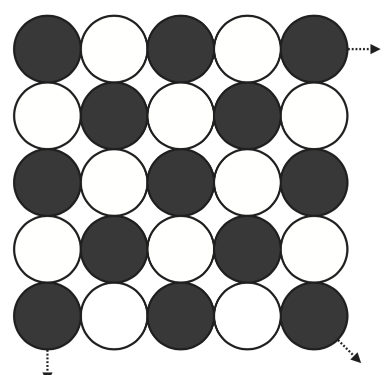


Problema 84. Tenemos cuatro dados con forma de tetraedro regular, perfectamente balanceados, con sus caras numeradas con 2, 0, 1 y 7. Si lanzamos los 4 dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2017 usando exactamente uno de los 3 números visibles de cada dado?

Problema 85. El polinomio $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ tiene coeficientes enteros a y b. ¿Cuál de los siguientes números se puede asegurar que no es una raíz del polinomio?

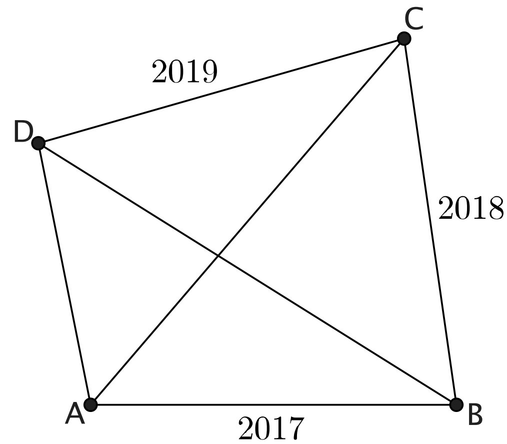
A) 1 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

Problema 86. Julia tiene 2017 fichas, 1009 de ellas son negras y el resto son blancas. Los coloca en un patrón cuadrado como se muestra en la figura, comenzando con una ficha negra en la esquina superior izquierda, alternando colores en cada fila y cada columna. ¿Cuántas fichas de cada color quedan después de haber completado el mayor cuadrado posible?



Problema 87. Dos números consecutivos son tales que la suma de los dígitos de cada uno de ellos son múltiplos de 7. ¿Por lo menos cuántos dígitos tiene el número más pequeño?

Problema 88. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las diagonales son perpendiculares. Los lados tienen medidas $AB = 2017$, $BC = 2018$ y $CD = 2019$. ¿Cuál es la longitud de AD?



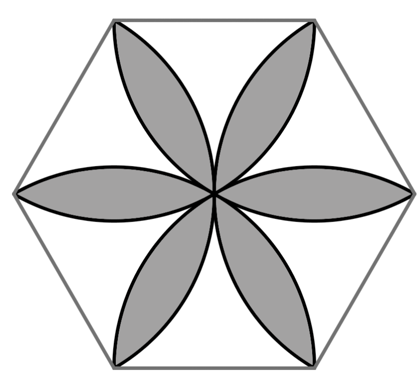
Problema 89. Nico el Canguro trata de ser sincero, pero para él, mentir es demasiado divertido y cada tres frases que él dice, una de ellas es mentira y el resto es verdad. (A veces comienza con una mentira y a veces con una o dos afirmaciones verdaderas). Nico está pensando en un número de dos dígitos y le está diciendo a su amigo las siguientes afirmaciones:

- Uno de sus dígitos es 2.
- Es más grande que 50.
- Es un número par.
- Es menor a 30.
- Es divisible por 3.
- Uno de sus dígitos es 7.

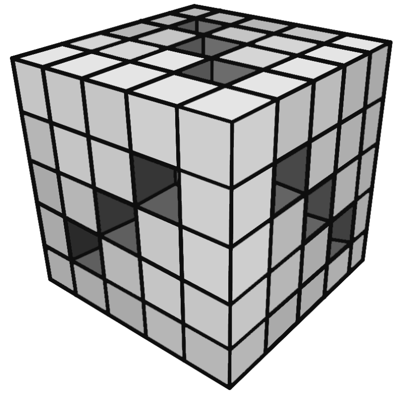
¿Cuál es la suma de los dígitos del número que Nico está pensando?

Problema 90. ¿Cuántos números enteros positivos cumplen la propiedad siguiente: El número que se obtiene al eliminar el dígito de las unidades es $\frac{1}{14}$ del número original?

Problema 91. La imagen muestra un hexágono regular con sus lados de longitud igual a 1. La flor de 6 pétalos fue construida con sectores circulares de radio 1 y centros en los vértices del hexágono. ¿Cuál es el área de la flor de 6 pétalos?

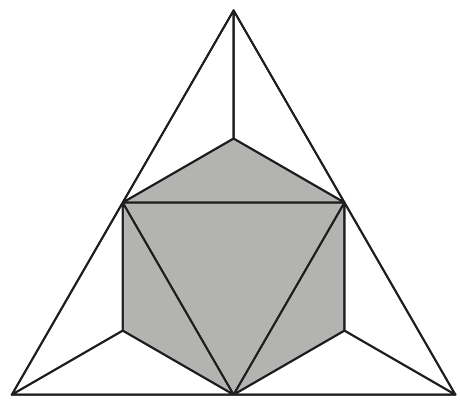


Problema 92. Juan tiene un cubo de 5cm×5cm×5cm formado por muchos cubos pequeños de 1 cm^3 cada uno, su hermana le ha quitado 9 columnas completas de cubos como se muestra en la figura. Determina cuantos cubos pequeños retiró la hermana de Juan.



Problema 93. Considere la secuencia a_n, con $a_1 = 2017$ y $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. ¿Cuál es el valor de a_{2017}?

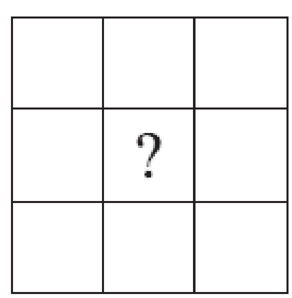
Problema 94. Considere un tetraedro regular, donde sus cuatro esquinas son cortadas por 4 planos, donde cada uno pasa por los puntos medios de 3 aristas adyacentes. ¿Qué parte del volumen del tetraedro original es el volumen del solido resultante?



Problema 95. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es 18. La suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a 128. ¿Cuál es el área del triángulo rectángulo?

Problema 96. Daniela tiene 5 cajas, 5 bolas negras y 5 bolas blancas. Ella ubica las bolas en las cajas (cada caja debe contener al menos una bola) para apostar de la siguiente manera con su amiga Emilia: Si Emilia saca una pelota de una caja de su elección y gana si extrae una pelota blanca, de lo contrario, Daniela gana. ¿Cómo Daniela debe distribuir las bolas en las cajas para tener la mejor oportunidad de ganar?

Problema 97. Nueve enteros se escriben en las celdas de una tabla de 3×3. La suma de los nueve números es igual a 500. Se sabe que los números en celdas vecinas (celdas que comparten un lado común) difieren en 1. ¿Cuál es el número en la celda central?



Problema 98. Si $|x| + x + y = 5$ y $x + |y| - y = 10$, ¿Cuál es el valor de $x + y$?

Problema 99. ¿Cuántos enteros positivos ABC de tres dígitos existen, de modo que $(A + B)^C$ es un entero de tres dígitos y una potencia entera de 2?

Problema 100. En una isla de 2017 personas, algunas siempre mienten y otras siempre dicen la verdad. Más de 1000 de ellos se encuentran en un banquete, sentados todos juntos alrededor de una mesa. Cada uno de ellos dice: “de las 2 personas que se encuentran a mi lado, uno es un mentiroso y el otro dice la verdad”. ¿Cuál es el mayor número de personas que dicen la verdad en dicha isla?

2

Soluciones

Problema 1. Una mosca tiene seis patas y una araña tiene ocho. Si hay tres moscas y dos arañas estas tienen tantas patas como nueve pollos y algunos gatos. ¿Cuántos son estos gatos?

Solución:

Como una mosca tiene 6 patas, 3 moscas tienen 18 patas. Como una araña tiene 8 patas, 2 arañas tienen 16 patas. Entre arañas y moscas suman un total de 34 patas. Como los pollos tienen 2 patas, 9 pollos sumarán un total de 18 patas. Finalmente, el total de patas de gato son la diferencia en 34 y 18, como los gatos tienen 4 patas, habrá $16 \div 4 = 4$ gatos.

Problema 2. Un dado especial tiene un número en cada cara. Las sumas de los números en las caras opuestas son todas iguales. Cinco de los números son 5, 6, 9, 11 y 14. ¿Cuál es el número que está en la sexta cara?

Solución:

Para calcular el número faltante veamos todas las posibles combinaciones:

- 5+6=11
- 5+11=16
- 6+9=15
- 6+14=20
- 9+14=23
- 5+9=14
- 5+14=19
- 6+11=17
- 9+11=20
- 11+14=25

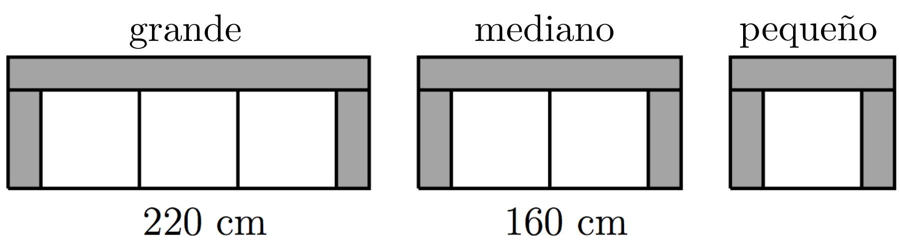
Como sólo tenemos dos sumas iguales sabemos que la suma de las caras opuestas es 20. Y como en estas sumas sólo usamos los números 6, 9, 11 y 14, nuestro número sobrante es el 5, es por esto que el número faltante es 15, pues $5 + 15 = 20$.

Problema 3. Mientras que Pedro resuelve dos problemas en el campeonato de matemática, Ernesto logra solucionar tres problemas. Los estudiantes resolvieron 30 problemas en total. ¿Cuántos problemas resolvió Ernesto más que Pedro?

Solución:

Como en el tiempo que Pedro resuelve 2 problemas, Ernesto resuelve 3, cada 5 problemas que resuelvan en total, 2 problemas serán de Pedro y 3 problemas serán de Ernesto. Como $30 = 5 \cdot 6$, Pedro resolverá $2 \cdot 6 = 12$ problemas mientras que Ernesto resolverá $3 \cdot 6 = 18$ problemas, teniendo una diferencia de 6 problemas entre ellos.

Problema 4. Una tienda de muebles vende sofás grandes, sofás medianos y sofás pequeños, hechos de piezas idénticas como se muestra en la figura, incluyendo los apoyabrazos, el ancho del sofá grande es de 220 cm y el ancho del sofá mediano es de 160 cm.



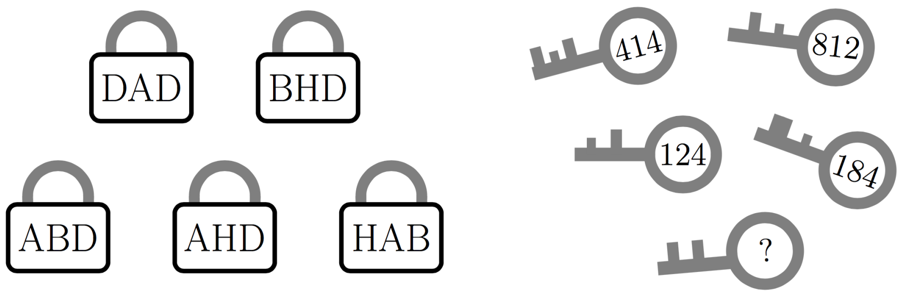
¿Cuál es el ancho del sofá pequeño?

Solución:

Como el sofá grande tiene 2 apoya brazos y 3 asientos acolchados y el sofá mediano tiene 2 apoya brazos y 2 asientos acolchados, podemos ver que el sofá grande tiene un asiento acolchado más que el mediano, y estos difieren en 60 cm de ancho, es decir, el ancho de un asiento acolchado es de 60 cm.

Como el sofá mediano difiere del pequeño en un asiento acolchado y cada asiento acolchado mide 60 cm, el sofá mediano es 60 cm más ancho que el pequeño, es por esto que el pequeño mide 100 cm de ancho.

Problema 5. Cada una de las 5 llaves de la figura pertenece a alguno de los 5 candados. Cada número que aparece en una llave corresponde a una de las letras de los candados. ¿Cuál es el número escrito en la última llave?



Solución:

Como solamente el candado con las letras DAD tiene la primera y última letra iguales podemos decir que a este le pertenece la llave con el número 414 por lo que $A = 1$ y $D = 4$.

Al reemplazar las letras A y D por 1 y 4, quedamos con los candados 414, $BH4$, $1B4$, $1H4$ y $H1B$. Como todos los candados terminan en $D = 4$ menos HAB y tenemos 3 llaves que terminan en 4 y una en 2 concluimos que la llave de HAB es 812 por lo que $B = 2$ y $H = 8$.

Al reemplazar las letras B y H por 2 y 8, quedamos con los candados 414, 812, 284, 124, 184, en donde solo la llave 284 no está, es por esto que es el número escrito en la última llave de la figura.

Problema 6. Tomás escribe los primeros 20 números naturales uno tras otro (sin espacio entre ellos) y obtiene el siguiente número de 31 dígitos:

$$1234567\ldots181920.$$

Luego, elimina 24 de los dígitos de este número de tal manera que el nuevo número sea lo más grande posible. Si Tomás no desordena los números. ¿Qué número obtiene?

Solución:

La cifra más grande por la que puede empezar el nuevo número es 9, por lo que descartamos los números del 1 al 8, obteniendo el número:

$$91011121314151617181920.$$

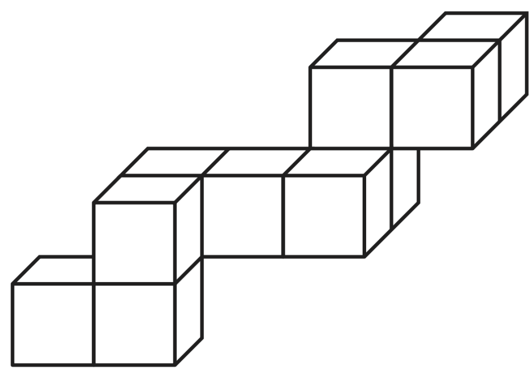
Luego, como al número de 31 dígitos se le deben eliminar 24 dígitos, tenemos que el nuevo número tiene que ser de 7 dígitos. Para esto intentamos dejar seguido de 9 el número más grande posible, y este será el 7 pues si llegamos al 8 habremos eliminado 25 dígitos. Luego, tenemos el número:

$$97181920.$$

Como queremos obtener el número más grande posible de 7 dígitos borramos el primer número 1, obteniendo finalmente el número

$$9781920.$$

Problema 7. Matías ha pegado algunos cubos de lado 1 cm y ha formado el sólido de la figura. Matías desea poner su construcción dentro de una caja. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más pequeña que Matías puede usar?



Solución:

Esta caja tendrá que contener como mínimo los cinco cubos pegados horizontalmente, por lo que su ancho será 5 cm. Como posee 3 figuras de alto su altura debe ser como mínimo de 3 cm. Y como posee 4 figuras hacia atrás su profundidad debe ser como mínimo 4 cm, por lo que sus medidas deben ser de $3 \times 4 \times 5$.

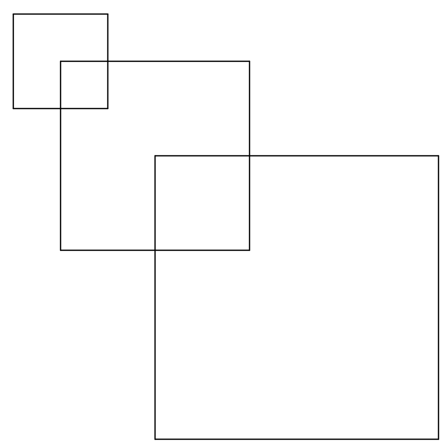
Problema 8. Benjamín fue de excursión a la montaña y caminó durante 5 días. Comenzando el lunes, Benjamín caminó 2 kilómetros más que el día anterior. Cuando terminó su viaje, en total recorrió 70 kilometros. ¿Cuánto caminó el jueves?

Solución:

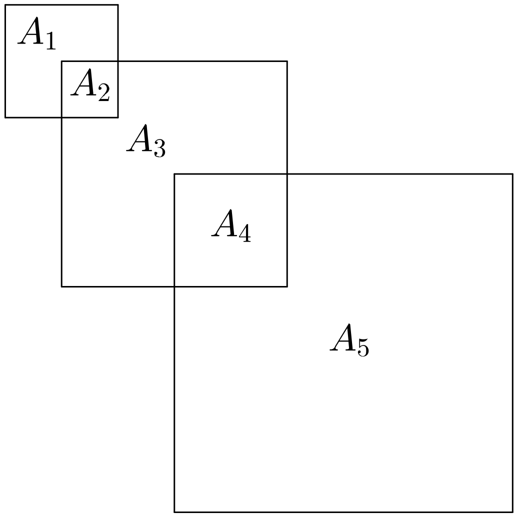
Si el martes caminó 2 kilómetros más que el lunes, entonces, el miércoles caminó 4 kilómetros más que el lunes, el jueves 6 kilómetros más que el lunes y el viernes caminó 8 kilómetros más que el lunes. Luego, podemos decir que caminó 5 veces la distancia que recorrió el día lunes más lo que aumentó los otros días, que sería $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Como en total Benjamín caminó 70 kilometros, que corresponden a 5 veces lo que caminó el lunes más 20 kilómetros que aumentó el resto de los días, entonces, 5 veces lo que caminó el lunes corresponde a 50 kilómetros, es por esto que el lunes caminó 10 kilómetros y como el jueves caminó 6 km más que el lunes, entonces caminó 16 km el jueves.

Problema 9. Rafael tiene tres cuadrados. El primero es de lado 2 cm. El segundo es de lado 4 cm y un vértice en el centro del primer cuadrado. El último es de lado 6 cm y un vértice colocado en el centro del segundo cuadrado, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es el área de la figura?



Solución:



Notemos que la figura queda dividida en 5 regiones, denotemos por A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 cada región. Si el segundo cuadrado tiene un vértice en el centro del primero, entonces se formará un cuadrado de área A_2, de lado igual a la mitad de la longitud del lado del primer cuadrado. Si el lado del primer cuadrado mide 2 cm, entonces el cuadrado de área A_2 será de lado 1 cm. Por lo tanto, el área de A_2 es 1 cm^2 y en consecuencia el área de A_1 es 3 cm^2.

Si el tercer cuadrado tiene un vértice en el centro del segundo cuadrado, entonces se formará un cuadrado de área A_4, de lado igual a la mitad de la longitud del lado del segundo cuadrado. Si el segundo cuadrado tiene medida del lado igual a 4 cm, entonces el cuadrado de área A_4 será de lado 2 cm. Por lo tanto, el área de A_4 es 4 cm^2 y en consecuencia, el área de A_3 es 11 cm^2.

Como el tercer cuadrado tiene área 36 cm^2, entonces el área de A_5 es 32 cm^2. Finalmente, el área de la figura es:

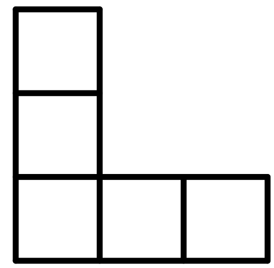
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = (3 + 1 + 11 + 4 + 32) \text{ cm}^2 = 51 \text{ cm}^2.$$

Problema 10. Cuatro jugadores juegan un partido de handball. Todos ellos anotaron un número diferente de goles. De los cuatro jugadores, Javier fue el que marcó el menor número de goles. Los otros tres suman un total de 20 goles. ¿Cuál es el mayor número de goles que Javier pudo haber anotado?

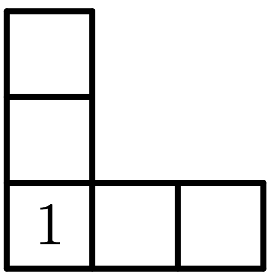
Solución:

Para que Javier tenga la menor cantidad de puntos, lo ideal es que los tres jugadores restantes obtengan una cantidad similar de goles. Podemos inicialmente, pensar que el primero hizo 6 goles, mientras que el segundo y tercero hacen 7 cada uno goles, pero dado que cada uno de los jugadores marca un número diferente de goles, las únicas opciones serían $5-7-8$ o bien $5-6-9$, en cualquiera de los casos, Javier podría anotar un máximo de 4 goles.

Problema 11. Los números 1, 2, 3, 4 y 5 tienen que escribirse en las cinco celdas de la figura de la siguiente manera: Si un número está justo debajo de otro número, tiene que ser menor, si un número está justo a la derecha de otro número, tiene que ser mayor. ¿De cuántas maneras esto se puede hacer?

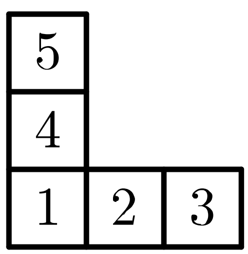


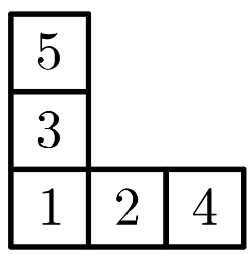
Solución:

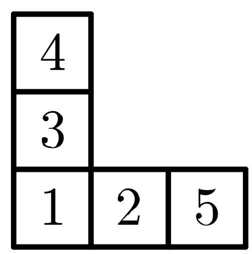


Como un número que este debajo de otro debe ser mayor y un número que este a la derecha de otro debe ser mayor. El número 1 debe ir al centro.

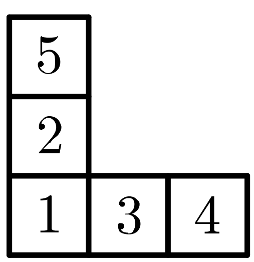
Si a la derecha del 1 va el 2 a la derecha de este puede ir el 3, 4 o 5 dejando sólo dos números los cuales quedarán ubicados arriba del 1.

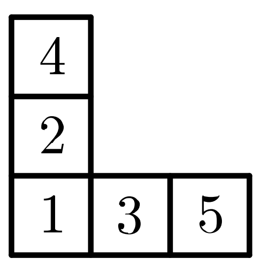




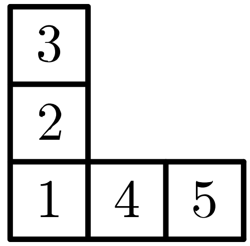


Si a la derecha del 1 va el 3 a la derecha de este puede ir el 4 o el 5 dejando sólo dos números los cuales quedarán ubicados arriba del 1.





Si a la derecha del 1 va el 4 a la derecha de este sólo puede ir el 5 dejando sólo dos números los cuales quedarán ubicados arriba del 1.



Por lo tanto todos los casos posibles son 6.

Problema 12. Mónica tiene 5 números diferentes a, b, c, d y e. Ella quiere multiplicar algunos de ellos por 2 y otros por 3 y el resto por 1, con el fin de obtener el menor número de resultados diferentes. ¿Cuál es el menor número de resultados distintos que ella puede obtener?

Solución:

Notemos al multiplicar un número por dos y otro por tres, podemos llegar a un mismo resultado, por ejemplo, $4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12$, esto quiere decir que en la lista de 5 números nos convendría, por ejemplo, tener los números 4, 6, 12, d y e. Lo anterior lo podemos generalizar y decir que los números a, b y c, deben cumplir que:

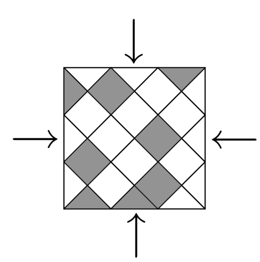
$$c = 2b = 3c.$$

En este caso c se múltiplica por 1, b se multiplica por 2 y a se multiplica por 3 y se obtiene el mismo resultado.

Para los otros dos números restantes basta que uno sea el doble del otro y tendríamos un nuevo resultado, Es por esto, se tienen como mínimo 2 resultados posibles. Un caso particular es

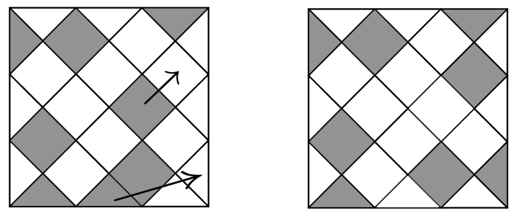
$$4, 6, 12, 25, 50$$

Problema 13. El piso cuadrado en la imagen está cubierto por baldosas triangulares y cuadradas de colores gris o blanco. ¿Cuál es el menor número de baldosas grises que deben ser intercambiadas con baldosas blancas de manera que el patrón sea el mismo en cada una de las direcciones mostradas?



Solución:

Para realizar la menor cantidad de intercambios bastará desplazar un triángulo y un cuadrado gris a las posiciones marcadas en la siguiente figura:



Problema 14. Una bolsa contiene solo bolitas rojas y verdes. Si elegimos 5 bolitas al azar, es seguro que por lo menos una es roja y si elegimos 6 bolitas al azar, es seguro que por lo menos una es verde. ¿Cuál es el mayor número de bolitas que la bolsa puede contener?

Solución:

Si se toma 5 bolitas se tiene mínimo una roja, por lo que se toma un máximo de 4 verdes, y si se toma 6 bolitas se tiene mínimo una verde, por lo que tenemos un máximo de 5 rojas. Luego, se tiene un máximo de 4 bolitas verdes y 5 bolitas rojas, teniendo un total de 9 bolitas.

Problema 15. A Alejandra le gustan los números pares, a Bárbara le gustan los números divisibles por 3 y a Camila le gustan los números divisibles por 5, ellas tienen una bolsa que contiene 8 bolas con números escritos en estas. Cada una saca de la bolsa todas las bolas con los números que le gustan. Y resulto que Alejandra tomo los números 32 y 52, Bárbara tomo los números 24, 33 y 45, Camila tomó los números 20, 25 y 35. ¿Cuál es el orden en que cada una se acercó a la bolsa?

Solución:

Sabemos que los números que hay en la bolsa son: 20, 24, 25, 32, 33, 35, 45 y 52. De estos, los números preferidos de cada una son:

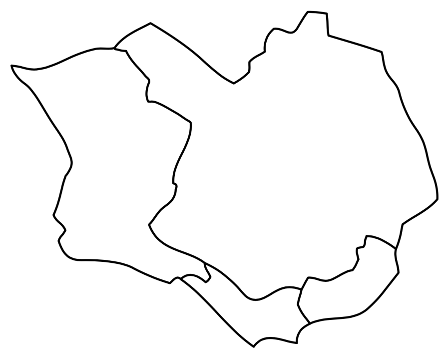
	20	24	25	32	33	35	45	52
Alejandra	X	X		X				X
Bárbara		X			X		X	
Camila	X		X			X	X	

Camila tomó el número 20, esto quiere decir que, Camila tuvo que tomar el número primero que Alejandra, porque de lo contrario Alejandra lo hubiese tomado, ya que 20 es número par.

Por otra parte, notemos que Bárbara tomó el número 45. Esto quiere decir que, Bárbara tuvo que tomar el número primero que Camila, porque de lo contrario Camila lo hubiese tomado, ya que 45 es un número divisible por 3.

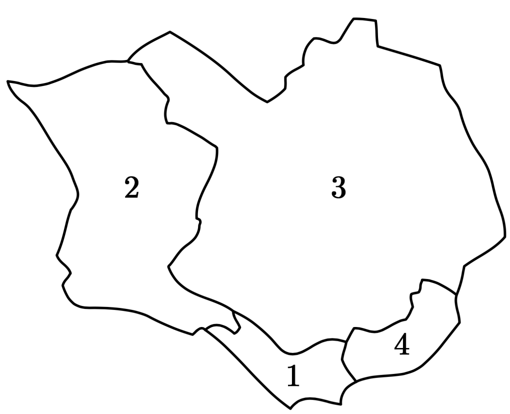
Según lo anterior, el orden en que se acercaron a la cesta fue Bárbara, luego Camila y finalmente Alejandra.

Problema 16. Julia tiene cuatro diferentes lápices de colores y quiere utilizar la totalidad o parte de ellos para pintar el mapa de la isla, que está dividido en cuatro naciones, como se muestra en la figura.



Si en el mapa dos naciones con una frontera en común no puede tener el mismo color. ¿De cuantas maneras puede pintar ella el mapa de la isla?

Solución:



Julia debe utilizar como mínimo 3 colores distintos, dado que las naciones numeradas con 1 y 3 poseen fronteras comunes con todas las naciones restantes.

Para ejemplificar, pensemos en que disponemos de los colores A, B, C y D. La nación 2 utiliza el color A, por lo tanto la nación 3 debe utilizar uno de los colores restantes; B, C o D. Supongamos que utiliza el color B, por lo tanto la nación 1 no puede emplear ni el color A ni el color B. Luego, la nación 1 debe utilizar un color restante; C o D. Mientras que la nación 4 puede emplear el color de la nación 2 o bien el color restante D.

Para la nación 2 puede seleccionarse uno de los 4 colores. Para la nación 3 restan 3 opciones de colores, para la nación 1 restan 2 opciones y para la nación 4 restan 2 opciones; el último color o bien el color de la nación 2. La cantidad de combinaciones posibles corresponde al producto de las opciones que presenta cada nación, es decir:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48 \text{ combinaciones posibles.}$$

Problema 17. En cada celda de un tablero 6×6 hay una lámpara. Decimos que dos lámparas en este tablero son vecinas si se encuentran en celdas con un lado común. Inicialmente se encienden algunas lámparas, y luego, por cada minuto transcurrido, se enciende cada lámpara que tiene al menos dos lámparas vecinas iluminadas, ¿cuál es el número mínimo de lámparas que deben encenderse inicialmente para asegurarse de que en algún momento todas las lámparas se encenderán?

Solución:

Ilustraremos el encendido de las lamparas con los números 0, 1, 2, 3, . . ., donde cada uno representa el minuto en que se enciende la lámpara. Si se comienza por un tablero de 2×2, notemos que se requieren solo 2 lámparas:

0	1
1	0

Si se analiza el caso un tablero de 3×3, notamos que se requieren solo 3 lámparas:

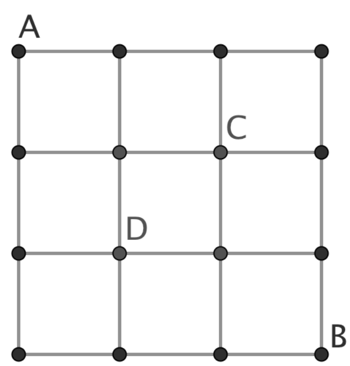
0	1	2
1	0	1
2	1	0

Si se analiza el caso de un tablero de 4×4, notamos que se requieren solo 4 lámparas:

0	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

Se puede notar que la cantidad de lámparas necesarias para encender la totalidad de lámparas de un tablero cuadrado de 6×6 corresponde a la cantidad de casillas de la diagonal. Para este caso en particular, se requieren 6 lámparas.

Problema 18. Una hormiga tiene que ir del vértice A al vértice B, pasando obligatoriamente a alimentarse en el punto C o bien en D, la hormiguita solo viaja por los lados de los cuadraditos y solo puede ir hacia abajo y hacia hacia la derecha. ¿Cuántos caminos distintos puede hacer la hormiga?



Solución:

Si la hormiga pasa a alimentarse en el punto C esta tiene 3 caminos distintos para ir desde A a C y luego 3 caminos distintos para ir desde C a B. Por lo tanto, tiene $3 \cdot 3 = 9$ caminos desde A a B pasando por C.

Si la hormiga pasa a alimentarse en el punto D esta tiene 3 caminos distintos para ir desde A a D y luego 3 caminos distintos para ir desde D a B. Por lo tanto, tiene $3 \cdot 3 = 9$ caminos desde A a B pasando por D.

Finalmente la hormiga puede hacer $9 + 9 = 18$ caminos distintos.

Problema 19. ¿Qué hora serán 17 horas después de las 17:00?

Solución:

Si son las 17:00, deben transcurrir 7 horas para que sean las 24:00, luego deben transcurrir 10 horas más, por lo cual serán las 10:00.

Problema 20. Un grupo de chicas están formando un círculo. Carla es la cuarta a la izquierda de Sofía y la séptima a la derecha de Sofía. ¿Cuántas chicas están en el grupo?

Solución:

Si Carla es la cuarta a la izquierda de Sofía, significa que hay 3 personas entre Carla y la izquierda de Sofía. Si Carla es la séptima a la derecha de Sofía, significa que hay 6 personas entre Carla y la derecha de Sofía. Por lo tanto, en la ronda hay 9 personas entre Carla y Sofía. Finalmente en el grupo hay 9 niñas + Carla + Sofía, es decir, 11 personas.

Problema 21. ¿Qué número debe sustraerse a (-17) para obtener (-33)?

Solución:

Queremos determinar un valor desconocido que llamaremos x, tal que al restarle x a (-17), nos de por resultado (-33). Esto es:

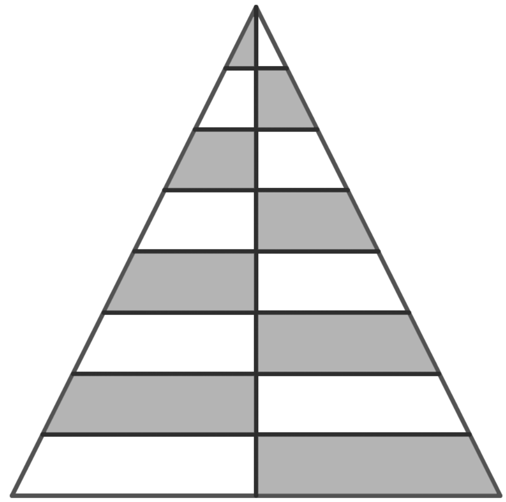
$$(-17) - x = (-33)$$

Empleando la propiedad de sustracción (adición del opuesto aditivo), se obtiene

$$(-17) + 17 - x = (-33) + 17$$

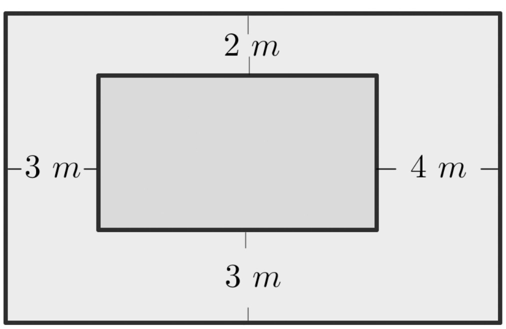
Luego $-x = -16$. Por lo tanto, el número que buscamos es 16.

Problema 22. La siguiente imagen muestra un triángulo isósceles y su altura. Si cada región achurada tiene la misma altura. ¿Qué porcentaje del área del triángulo es el área de la región no achurada?



Solución:

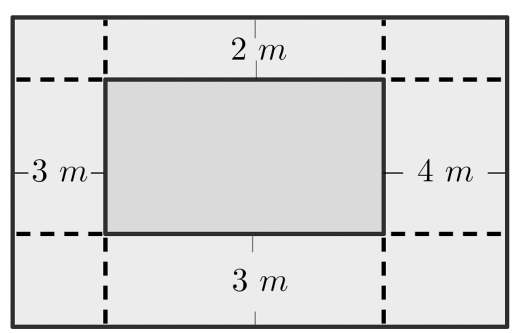
Basta notar que las regiones achuradas son simétricas a las regiones no achuradas adyacentes a ellas, por lo cual, se puede verificar que la mitad del triángulo está achurado y la otra mitad no, por lo cual el área de la región achurada es el 50 % del área del triángulo.



Problema 23. El siguiente diagrama muestra dos rectángulos de lados parelelos entre sí, uno dentro de otro. ¿Cuál es la diferencia de los perímetros en los dos rectángulos?

Solución:

La diferencia entre los perímetros está dada por la suma de los segmentos punteados, por lo cual, habrá 2 segmentos de $3m$, 2 segmentos de $2m$, 2 segmentos de $3m$ y 2 segmentos de $4m$, por lo cual la diferencia entre los perímetros es $2 \cdot (3 + 2 + 3 + 4)m = 24m$.



Problema 24. En cuantos ceros termina el Número $N = 3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21 \times \ldots \times 99$

Solución:

Notemos que N es el producto de los primeros 33 múltiplos de 3, es decir:

$$N = (3 \cdot 1) \times (3 \cdot 2) \times (3 \cdot 3) \times (3 \cdot 4) \times (3 \cdot 5) \times (3 \cdot 6) \times \ldots \times (3 \cdot 33)$$

En este producto debemos ver cuantos 10 aparecen, como $10 = 2 \cdot 5$ y en el producto tenemos solo 6 múltiplos de 5 en el producto, el número terminaría en 6 ceros, pero como $25 = 5 \cdot 5$ concluimos que el número termina en 7 ceros.

Problema 25. La suma de 3 números positivos enteros distintos es 7. ¿Cuál es el producto de estos 3 números?

Solución:

Escribamos 7 como una suma de 3 números positivos:

- $7 = 1 + 1 + 5$
- $7 = 1 + 2 + 4$
- $7 = 1 + 3 + 3$
- $7 = 2 + 2 + 3$

De las 4 opciones, solo la segunda, $7 = 1 + 2 + 4$, cumple con que los números son enteros positivos distintos. Luego el producto es $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Problema 26. Juan tiene 20 canguromonedas. Si Juan tiene 4 hermanos con 10 canguromonedas cada uno. ¿Cuántas canguromonedas tendrá que dar Juan a cada uno de sus hermanos para que los 5 hermanos tengan igual cantidad de canguromonedas?

Solución:

Juan junto a sus hermanos reúnen un total de:

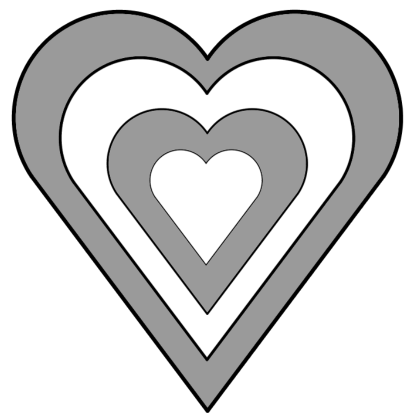
$$20 + 4 \cdot 10 = 60 \text{ canguromonedas}$$

. Por lo tanto, si queremos que todos tengan igual cantidad de dinero debemos dividir esta cantidad en los 5 hermanos, obteniendo:

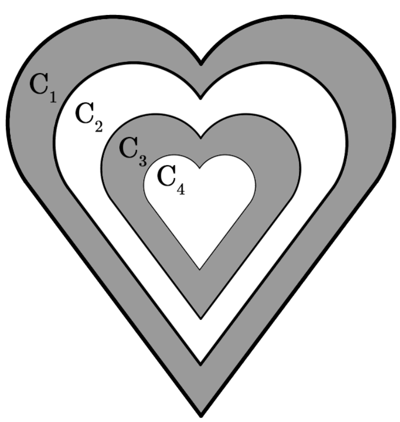
$$\frac{60}{5} = 12 \text{ canguromonedas}$$

Por lo tanto, cada hermano debería tener 12 canguromonedas. Luego, Juan debe dar a cada uno de sus hermanos 2 canguromonedas.

Problema 27. El diagrama muestra 4 corazones superpuestos. Si las áreas de los corazones son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2, 16 cm^2 respectivamente. ¿Cuál es el área sombreada?



Solución:



Llamaremos C_1, C_2, C_3 y C_4 a los corazones, comenzando por el mayor hasta el menor, como lo indicamos en la figura. Para determinar el área achurada, basta notar que al área de C_1 debemos restarle el área de C_2, sumado con la diferencia que se produce entre el área de C_3 y el área de C_4.

Total del área Achurada =(área C_1-área C_2)+(área C_3-área C_4) Total del área Achurada =(16 cm^2-9 cm^2)+(4 cm^2-1 cm^2)=7cm^2+3 cm^2=10cm^2.

Problema 28. Un sexto de la audiencia de un teatro son adultos. Dos quintos son niños. ¿Qué fracción de la audiencia son niñas?

Solución:

Si $\frac{1}{6}$ de la audiencia del teatro son adultos, significa que $\frac{5}{6}$ no son adultos.

De estos $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$ son niños, por lo tanto, $\frac{3}{5}$ deben ser niñas.

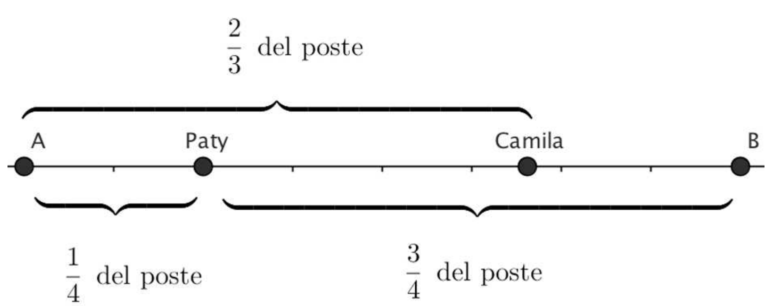
Luego, la fracción de la audiencia que son niñas son los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{5}{6}$, es decir:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, las niñas representan $\frac{1}{2}$ de la audiencia.

Problema 29. Camila la hormiga comienza a caminar desde el extremo izquierdo de un poste horizontal y avanza 2/3 de este hacia la derecha. Paty la chinita parte desde el extremo derecho del poste y avanza 3/4 de este hacia la izquierda. ¿A qué distancia están Camila y Paty en relación al tamaño del poste?

Solución:

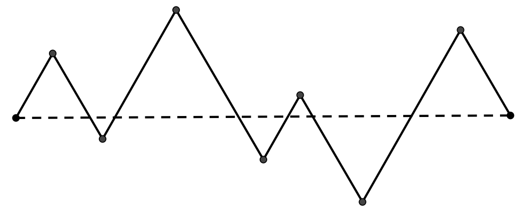


Si Paty avanzó 3/4 del poste, significa que le resta 1/4 del poste por recorrer. Por lo tanto, la distancia que separa a Camila de Paty corresponde a la diferencia entre la distancia recorrida por la hormiga y la distancia que le falta por recorrer a la chinita. Esto es:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Luego Camila y Paty están a $\frac{5}{12}$ del tamaño del poste.

Problema 30. En el diagrama, la línea puntuada y la línea negra forman 7 triángulos equiláteros. Si la longitud de la línea puntuada es de 20cm. ¿Cuál es la longitud de la línea negra?



Solución:

Los triángulos equiláteros cumplen la propiedad de que sus 3 lados son de igual longitud, por lo tanto, notamos que la línea negra está formada por 2 lados de cada triángulo equilátero.

La línea punteada corresponde a la unión de uno de los lados de cada triángulo equilátero, por lo tanto, si esta mide 20 cm, la línea negra, al estar formada por 2 lados de cada triángulo equilátero, deberá medir el doble de la línea punteada. Esto es 40 cm.

Problema 31. Cuatro primas Sonia, Susana, Teresa y Valentina son de 3, 8, 12 y 14 años de edad, no necesariamente en ese orden. Sonia es más joven que Teresa, la suma de las edades de Sonia y Valentina es divisible por 5. La suma de las edades de Teresa y Valentina también es divisible por 5. ¿Cuál es la edad de Susana?

Solución:

De la información que otorga el enunciado, sabemos que la suma de edades de Sonia y Valentina, así como la de Teresa y Valentina son divisibles por 5.

Notemos que las únicas sumas que dan un número divisible por 5 son 3+12 y 8+12, por lo cual, se deduce que la edad de Valentina es 12, y dado que Sonia es más joven que Teresa, Sonia tiene 3 años, Teresa 8 años y por tanto, Susana tiene 14 años.

Problema 32. Este año hay más de 800 participantes en la carrera del canguro. Si exactamente un 35 % de los corredores son mujeres y hay 242 hombres más que mujeres. ¿Cuántos corredores hay en total?

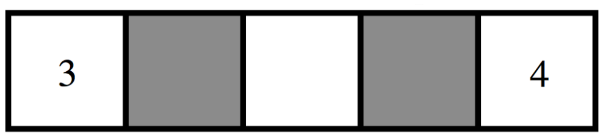
Solución:

Sea T el número total de corredores. Si $35\,\%$ de los corredores son mujeres, entonces el $65\,\%$ restante son hombres, luego el número de hombres en la carrera es $\dfrac{65}{100}T$ y el número de mujeres es $\dfrac{35}{100}T$. Además, se sabe que hay 242 hombres más que mujeres, esto nos indica que:

$$\frac{65}{100}T = 242 + \frac{35}{100}T$$

Luego, las 242 personas deben representar un $30\,\%$ del total de manera que se cumpla la igualdad. Luego: $242 = \dfrac{30}{100}T$, obteniendo que el total $T = 840$ corredores.

Problema 33. Rita busca escribir un número en cada casilla del diagrama. En las casillas ya han sido escritos dos números Ella busca que la suma de todos los números sea igual a 35, la suma de los tres primeros números sea igual a 22 y la suma de los 3 últimos números sea igual a 25. ¿Cuál es el producto de los números en las dos casillas achuradas?



Solución:

Denotemos por A, B y C a las casillas vacías. Sabemos que si todas las casillas suman en total 35, entonces:

$$\begin{aligned} 3 + A + B + C + 4 &= 35 \\ A + B + C &= 28 \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que la suma de las 3 primeras casillas es igual a 22, es decir que:

$$\begin{aligned} 3 + A + B &= 22 \\ A + B &= 19 \end{aligned}$$

Pero si $A + B + C = 28$, y sabemos que $A + B = 19$, entonces el valor de $C = 9$. Sabemos que la suma de las últimas tres casillas es 25, es decir que:

$$\begin{aligned} B + C + 4 &= 25 \\ B + C &= 21 \end{aligned}$$

Pero si $C = 9$, entonces $B = 12$ se tiene que $A = 7$. Finalmente el producto de las casillas achuradas A y C es $9 \cdot 7 = 63$.

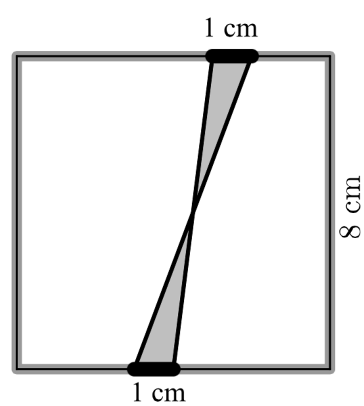
Problema 34. Simón quiere cortar un trozo de hilo en nueve partes de igual longitud y marca con un lapiz sus puntos de corte. Bárbara quiere cortar el mismo trozo de hilo pero en ocho partes de igual longitud y marca sus puntos de corte. Carlos toma el hilo y corta todos los puntos marcados. ¿Cuantos trozos de hilo obtiene Carlos?

Solución:

Notemos que para obtener 9 trozos Simón debe hacer 8 marcas. Por otra parte, para obtener 8 trozos Bárbara debe realizar 7 marcas. Observemos que siempre que se realizan n marcas en el hilo, se obtienen $n + 1$ trozos.

Dado que ninguno de las marcas de Simón y Bárbara coinciden, se obtienen 15 marcas, por lo cual Carlos obtendrá en total 16 trozos.

Problema 35. Dos segmentos, cada uno de 1 cm de longitud, son marcados en los lados opuestos de un cuadrado de arista 8cm. El final de los segmentos se une como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el área achurada en cm^2?



Solución:

Podemos ver que se forman 2 triángulos de base 1 cm y alturas denominaremos h_1 y h_2, tales que $h_1 + h_2 = 8$ cm.

Notemos que el área achurada corresponde a la suma de las áreas del triángulo superior e inferior, es decir:

$$\begin{aligned}\text{Área achurada} &= \frac{1\cdot h_1}{2}+\frac{1\cdot h_2}{2}\\ &= \frac{h_1+h_2}{2}\\ &= \frac{8}{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

Luego el área achurada es 4cm^2.

Problema 36. Joaquín quiere preparar su horario para poder salir a correr. Él quiere correr exactamente dos veces a la semana y los mismos días cada semana. Si nunca va a correr dos días consecutivos. ¿Cuántas formas distintas tiene para ordenar su horario?

Solución:

Debemos determinar todas las combinaciones posibles de 2 días no consecutivos:

- Si decide correr el lunes, debe correr el miércoles, o el jueves, o el viernes, o el sábado. En total, 4 opciones.
- Si decide correr el martes, debe correr el jueves, o el viernes, o el sábado, o el domingo. En total, 4 opciones.
- Si decide correr el miércoles, debe correr el viernes, o el sábado, o el domingo. Se descarta miércoles y lunes pues ha sido considerado anteriormente. En total, 3 opciones más.
- Si decide correr el jueves, debe correr el sábado, o el domingo. Se descarta lunes y martes pues han sido considerados anteriormente. En total, 2 opciones más.
- Si decide correr el viernes, debe correr el domingo. En total, 1 opción más.

Finalmente, hay 14 opciones distintas.

Notemos que el conteo anterior es para elegir 2 días de un total de 7, es decir, $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$. Pero debemos descontar aquellas combinaciones que tienen días consecutivos, las cuales corresponden a 7; lunes-martes, martes-miércoles, miércoles-jueves, jueves-viernes, viernes-sábado, sábado-domingo y domingo-lunes. En total habrá $21 - 7 = 14$ opciones.

Problema 37. Emilia quiere escribir un número en cada casilla de un tablero de 3×3, tal que la suma de los números de dos celdas cualesquiera que compartan un lado sea la misma. Si ella ya ha escrito dos números como se muestra en el diagrama. Si los números de la tabla no son necesariamente distintos ¿Cuál será la suma de los números?

2		
		3

Solución:

Sean a, b, c, d, e, f, g los números que faltan en la tabla:

2	a	b
c	d	3
e	f	g

Notemos que $c + d = d + 3$, por lo tanto $c = 3$. Luego, podemos deducir que la suma de dos casillas que comparten un lado debe ser siempre 5, pues $2 + c = 2 + 3 = 5$.

Se concluye que $a = c = f = 3$ y que $b = d = e = g = 2$. Por lo tanto, la suma de los números de la tabla es $4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 22$

Problema 38. Un triángulo tiene tres ángulos diferentes. Si todos los ángulos son enteros. ¿Cuál es la mínima suma del mayor y el menor ángulo?

Solución:

Si queremos que la suma entre el mayor y el menor sea mínima, debemos considerar que el menor de ellos sea lo más pequeño posible y que los dos restantes sean cercanos, de manera que el mediano y el mayor disten a lo más un grado.

En ese sentido, consideremos que el menor ángulo es $1°$, el mediano es $89°$ y el mayor es $90°$. La suma será la menor posible y corresponde a $91°$.

Problema 39. Diez canguros se encuentran en una línea como se muestra en la figura. Los canguros que se encuentran frente a frente se saludan saltando unos sobre otros, intercambiando sus posiciones. Si esto se repite todas las veces posibles. ¿Cuántos saludos se hicieron?

Solución:

Notemos que el cambio de posición de los canguros ubicados en el tercer y cuarto lugar, es equivalente a que el tercer canguro avance a la derecha y pase a ocupar la posición del cuarto canguro. Entonces, para contar el total de saludos basta con contar la cantidad de saltos que realiza cada canguro que avanza hacia la derecha.

Para realizar el conteo de mejor manera, denotaremos con números los canguros que saltan hacia la derecha y con letras a los que saltan a la izquierda.

$$1 - 2 - 3 - A - B - 4 - 5 - 6 - C - D$$

Luego:

- El canguro 6 debe saludar a 2 canguros antes de llegar al extremo derecho.
- Los canguros 4 y 5, al igual que el canguro 6, deberán saludar a 2 canguros antes de llegar al extremo derecho.

- El canguro 3 deberá saludar a 4 canguros antes de llegar al extremo derecho.
- Los canguros 1 y 2, al igual que el canguro 3, deberán saludar a 4 canguros antes de llegar al extremo derecho.

En total, se han realizado 18 saludos y por lo tanto, 18 saltos.

Problema 40. Diana tiene nueve números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Diana suma 2 a algunos de ellos y 5 a todos los demás. ¿Cuál es el menor número de resultados distintos que puede obtener?

Solución:

Si a todos los números les sumáramos 2, se obtendrían los siguientes resultados:

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$

Si a todos los números se les sumara 5, se obtendrían los siguientes resultados:

$$6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.$$

Si queremos determinar el menor número posible de resultados distintos, debemos sumarle 2 a los números 6, 7, 8, 9 y sumarle 5 a los números 1, 2, 3, 4, 5. De esta manera se obtiene el conjunto de números (según el orden original):

$$6, 7, 8, 9, 10, 8, 9, 10, 11.$$

De los cuales se repiten el 8, 9 y 10, siendo 6 la menor cantidad de diferentes resultados.

Problema 41. En un aeropuerto salen buses cada 3 minutos hacia el centro de la ciudad. Un auto sale del aeropuerto al mismo tiempo que un bus, ambos en dirección al centro de la ciudad y por la misma ruta. Se sabe que le toma 60 minutos a un bus y 35 minutos a un auto llegar al centro de la ciudad. Si se excluye el bus con el cual el auto salió del aeropuerto. ¿A cuántos buses alcanza el auto, en su camino, antes de llegar al centro de la ciudad?

Solución:

Notemos que como los buses salen cada 3 minutos, tendremos 1 bus que parte junto con el auto en el minuto 0.

Además los buses que van por el camino salieron hace:

$m = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54$ y 57 minutos.

Para saber la cantidad de buses que pasa el automóvil, basta con descontar de esta lista aquellos que están a menos de 35 minutos de llegar al centro de la ciudad, pues los restantes serán alcanzados por el automóvil. Notemos que el bus que lleva 27 minutos en carretera, es el último bus que llega antes que el automóvil, por lo tanto aquellos que van en los tiempos 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24, son alcanzados por el automóvil. Finalmente, 8 son los buses alcanzados. Es decir, si

$m = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54$ y 57 minutos.

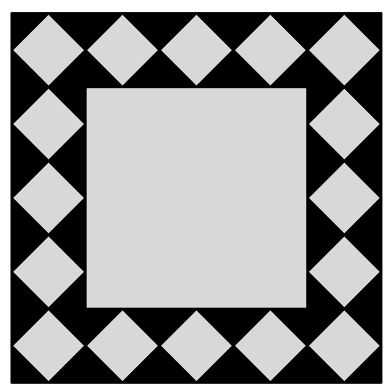
Se debe cumplir que

$$35 + m < 60 \rightarrow m < 25$$

Es decir:

$$m = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

Problema 42. El mantel de Eduardo tiene un patrón regular, como se muestra en la figura. ¿Qué porcentaje del mantel es negro?

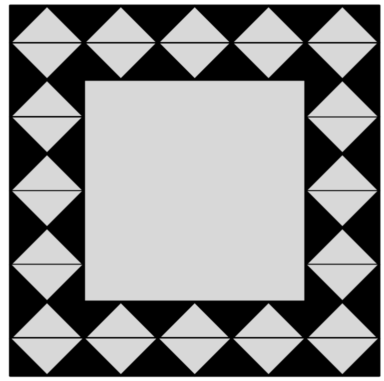


Solución:

Notemos que la suma de 5 diagonales de los cuadrados grises pequeños corresponde a la medida del lado del cuadrado mayor. La suma de 3 diagonales de los cuadrados grises pequeños corresponde a la medida del lado del cuadrado gris del centro. Sea d la longitud de la diagonal de los cuadrados grises.

Por lo tanto, la medida del lado del cuadrado mayor y el cuadrado gris son $5d$ y $3d$ respectivamente. Luego, el área del contorno corresponde a la diferencia entre el área del cuadrado mayor y el cuadrado gris mediano. Esto es:

$$\text{Área contorno} = 25d^2 - 9d^2 = 16d^2.$$



Podemos notar que con las subdivisiones realizadas la cantidad de triángulos negros que se forman es igual a la cantidad de triángulos grises, por lo tanto, el área negra del contorno es igual al área gris del contorno, siendo éstas iguales a $8d^2$.

Finalmente, el porcentaje del mantel que es negro con respecto del área total, es:

$$\frac{8d^2}{25d^2} = \frac{32}{100} = 32\,\%$$

Problema 43. Una secuencia comienza de la siguiente manera: 2, 3, 6, 8, 8, en donde el primer número es 2 y el segundo es 3. Luego, cada número de la secuencia corresponde a la cifra de las unidades del producto de los 2 números anteriores de la secuencia. ¿Cuál es el número que ocupa la posición 2017 en la secuencia?

Solución:

Notemos que la secuencia es:

$$2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, \ldots$$

Luego del 2 y 3, (1ra y 2da posición), se repite la secuencia 6, 8, 8, 4, 2, 8. Esto significa que cada 6 posiciones, la secuencia vuelve al inicio.

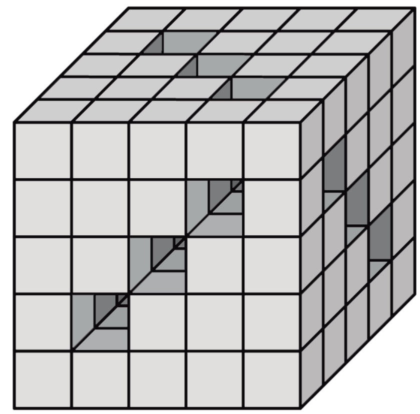
Como la primera y segunda posición son 2 y 3 respectivamente, restan 2015 posiciones. Si cada 6 se repite la secuencia, entonces dividimos 2015 en

6 para saber cuántas veces se ha repetido la secuencia. En efecto, notamos que:

$$2015 = 335 \cdot 6 + 5.$$

Al tener resto 5, se concluye que el número de la posición 2017 será aquel número que ocupa la 5ta posición de la secuencia que se repite, es decir, 2.

Problema 44. Juan tiene 125 cubos pequeños. Él pegó alguno de ellos para formar un cubo grande con 9 túneles que le atraviesan de un lado a otro (como se muestra en la figura). ¿Cuál es la menor cantidad de cubos pequeños que no uso?



Solución:

Llamaremos:

- Túneles de Largo a aquellos que se ven frente a nosotros (cara frontal de la figura).
- Túneles de Ancho a aquellos que se ven a los lados de la figura (caras laterales de la figura).
- Túneles de Alto a aquellos que se ven de manera vertical (cara superior).

Es lógico notar que cada túnel de ancho, largo y alto se cruzan en un espacio común. Si hacemos el ejercicio de colocar aquellos cubos faltantes, notamos que cada túnel de Largo ocupará 5 cubitos, pero cada túnel de Alto con el cual se cruza, necesitará solamente 4, pues el quinto ya ha sido considerado en el túnel de Largo. Lo mismo sucede para el túnel de Ancho con el cual se intersectan estos dos últimos, pues cada túnel necesitará solamente 4 cubitos.

En total, un caso de cruces de túneles de Largo, Ancho y Alto requiere 13 cubitos, pero como son 3 casos en total, se concluye que la cantidad de cubitos con los cuales debe rellenar esos espacios vacíos son 39. A partir de esto, se concluye que, 39 son los cubitos que no fueron utilizados.

Problema 45. Matías y Nicolás corren en direcciones opuestas en una pista circular de 720 metros, partiendo desde un mismo punto. Nicolás tarda 4 minutos en completar una vuelta, mientras que Matías tarda 5 minutos. Luego de comenzar a correr, cada vez que se encuentran en la pista, estos se saludan. Después del segundo saludo, ¿Cuántos metros debe recorrer Matías para llegar al punto de inicio?

Solución:

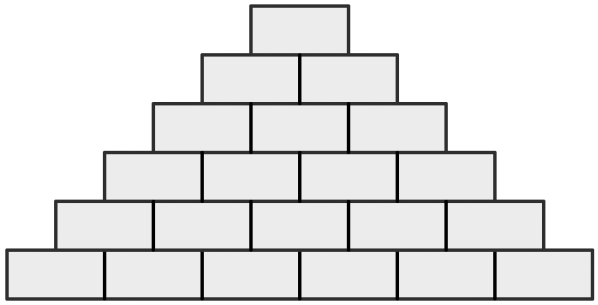
Supongamos que Matías recorre la pista en sentido antihorario y Nicolás en sentido horario. Cuando Nicolás recorre 1 metro, Matías recorre $0,8$ metros. Por lo tanto, en un mismo tiempo, recorren un total de $1 + 0,8 = 1,8$ metros. Si Nicolás recorre 1 metro más, Matías recorre $0,8$ metros más, por lo tanto, en un mismo tiempo, recorren nuevamente un total de $1,8$ metros. Sea x la cantidad de veces que se debe repetir esta acción hasta obtener 720 metros, donde:

$$\begin{aligned} 1,8x &= 720 \\ x &= 720 \div 1,8 \\ x &= 400 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos decir que, 400 veces debe ser repetida esta acción, por lo cual, Nicolás recorrerá 400 veces 1 metro, es decir, 400 metros. Matías recorrerá 400 veces 0,8 metros, es decir, 320 metros.

Lógicamente, podemos notar, que cada vez que se encuentren y se saluden, Nicolás habrá recorrido 400 metros y Matías 320 metros. Por lo tanto, después del segundo saludo, Matías ha recorrido 640 metros, restándole 80 metros para llegar al punto de inicio.

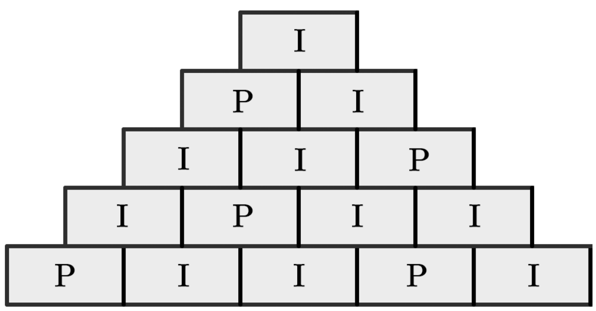
Problema 46. Pablo quiere escribir un número natural en cada casilla del diagrama de tal manera que cada número sea la suma de los dos números en las casillas inmediatamente inferiores. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares que puede escribir Pablo?



Solución:

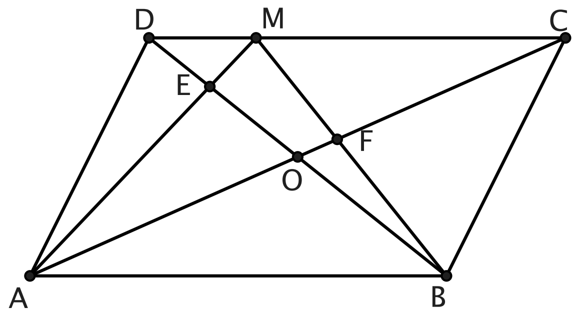
Recordemos que un número impar se puede obtener como suma de un número par y uno impar. Por su parte, un número par se puede obtener a partir de la suma de dos impares o bien de dos pares. Como la condición es obtener la mayor cantidad de números impares, escribiremos cada número par como suma de dos números impares.

Si comenzamos desde la casilla superior con un número impar y vamos realizando el proceso inverso, es decir, identificar qué tipo de número eran los anteriores (empleando símbolos P: par e I: impar), determinaremos la cantidad máxima de números impares que pueden ser escritos. De esta forma se obtiene la siguiente pirámide.



En total, 10 números impares.

Problema 47. La figura muestra un paralelogramo $ABCD$ con área S. La intersección de las diagonales del paralelogramo es el punto O. El punto M está sobre DC. En la intersección de AM con BD está el punto E y en la intersección de BM con AC está el punto F. Si la suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $S/3$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$, en términos de S?



Solución:

Sea h a la altura del paralelogramo respecto del lado AB. Por lo cual, se tiene que el área del paralelogramo $ABCD$ es $AB \cdot h = S$.

Notemos que el área del triángulo ABM es la mitad del paralelogramo $ABCD$, es decir, el área del triángulo ABM es:

$$A_{ABM} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{S}{2}.$$

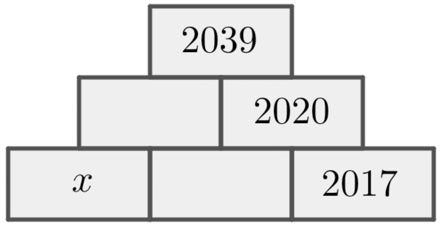
En consecuencia, la suma de las áreas de los triángulos AED, EMD, CMF y BFC es $\frac{S}{2}$, pero como el área de los triángulos AED y BFC suman $\frac{S}{3}$, se tiene que:

$$A_{EMD} + A_{CMF} = \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}.$$

Finalmente, basta notar que el área del triángulo OCD es $\frac{S}{4}$, pues tiene base $DC = AB$ y altura $\frac{h}{2}$, y dado que:

$$\begin{aligned} A_{CMF} + A_{EMD} + A_{EOFM} &= A_{OCD} \\ \frac{S}{6} + A_{EOFM} &= \frac{S}{4} \\ A_{EOFM} &= \frac{S}{4} - \frac{S}{6} \\ &= \frac{S}{12} \end{aligned}$$

Problema 48. En el diagrama, cada número es la suma de los dos números inferiores a él. ¿Cuál debe ser el valor de x?



Solución:

El número que sumado con 2017 da por resultado 2020 es 3, pues $3+2017=2020$. El número que sumado con 2020 da por resultado 2039 es 19, pues $19+2020=2039$. Finalmente, el valor buscado sumado con 3 da por resultado 19, es decir que, el valor buscado es 16, pues $16+3=19$.

Problema 49. Angela hizo una decoración con asteroides bicolores (gris y blanco). Las áreas de los asteroides son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2 . ¿Cuál es el área total de las partes grises visibles?

Solución:

Al asteroide de 16 cm^2 le restamos el área del asteroide de 9 cm^2, obteniendo la parte sombrada mayor, es decir, $16-9=7$ cm^2. Repitiendo el proceso el asteroide de 4 cm^2 y 1 cm^2, se obtiene la parte sombrada interior, es decir, $4-1=3$ cm^2.

Finalmente, el área total de las partes sombreadas es $7+3=10$ cm^2.

Problema 50. Martin juega ajedrez. Ha jugado 15 partidos esta temporada, de los cuales ha ganado 9 y aún le quedan 5 más por jugar. Si gana todos los restantes. ¿Cuál será su porcentaje de victoria?

$\boxed{\text{Solución:}}$

De los 15 partidos que ha jugado Martin, ha ganado 9, al agregar los 5 restantes y anotarlos como victoria, notamos que la proporción de juegos ganados versus el total de partidos corresponde a 14 victorias de 20 juegos disputados. Finalmente el porcentaje está dado por:

$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 70\,\%$$

Problema 51. Algunas chicas danzan en un círculo. Antonia es la quinta a la izquierda de Blanca y la octava a la derecha de Blanca. ¿Cuantas chicas hay en el círculo?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Consideremos que si Antonia es la quinta a la izquierda de Blanca, entonces hay 4 personas antes de Antonia (a la izquierda de Blanca). Por otra parte, en ese mismo sentido, debiesen haber 7 personas antes de Antonia (a la derecha de Blanca).

Finalmente, notamos que el total de chicas de izquierda a derecha es:

$$4 + \text{ Blanca } + \text{ Antonia } + 7 = 13$$

. En total hay 13 chicas.

Problema 52. En una boda, un octavo de los invitados son niños/as. Tres séptimos de los invitados adultos son hombres. ¿Qué fracción de los invitados adultos son mujeres?

Solución:

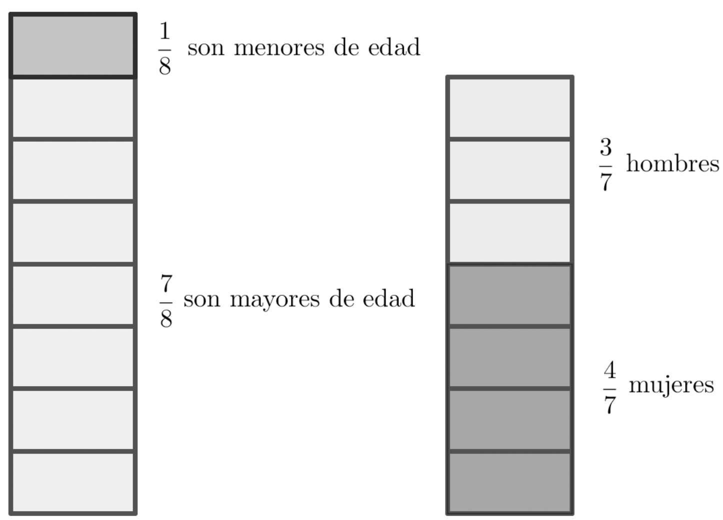
Sea x el total de invitados a la boda. Como $\frac{1}{8}$ de los invitados son niños/as, significa que $\frac{7}{8}$ son adultos.

La cantidad de hombres corresponde a $\frac{3}{7}$ de los adultos, pero los adultos son $\frac{7}{8}$ del total de invitados, por lo tanto, la cantidad de hombres es:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot x = \frac{3}{8}x$$

Luego, los hombres representan $\frac{3}{8}$ de los invitados a la boda, los niños $\frac{1}{8}$ del total y por tanto las mujeres $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ del total.

Notemos que el problema también se puede resolver representando las fracciones del enunciado de forma gráfica:



De este modo se deduce que las mujeres mayores de edad corresponden a la mitad de los invitados.

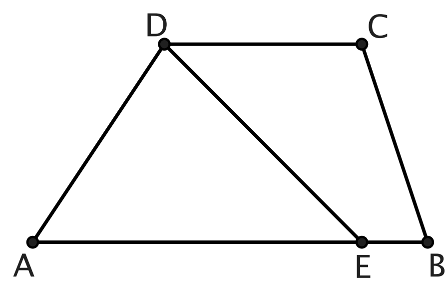
Problema 53. El profesor Gonzalez tiene una caja con botones de colores. La caja tiene 203 botones rojos, 117 blancos y 28 azules. El pide a sus estudiantes que tome un botón de la caja sin mirar. ¿Cuantos estudiantes tienen que tomar un botón para asegurar que se han extraído al menos 3 botones del mismo color desde la caja?

Solución:

Para lograr asegurar que se tomen al menos 3 botones del mismo color desde la caja, supongamos el peor de los casos, que ocurre cuando los 3 primeros estudiantes sacan un botón de diferente color, el cuarto estudiante obtendrá uno de los 3 colores ya obtenidos.

Supongamos que el quinto estudiante obtiene uno de los dos colores restantes y el sexto obtuviera el último color restante. Entonces, el séptimo estudiante si o si aseguraría que un color sería obtenido 3 veces. Finalmente, la cantidad de estudiantes necesarios para obtener al menos 3 botones del mismo color es 7.

Problema 54. $ABCD$ es un trapecio con lados AB paralelo a CD, donde AB es 50 y CD es 20. E es un punto en AB que divide al trapecio en dos polígonos de igual área, es decir el . Calcule la longitud de AE.



Solución:

El área del trapecio $ABCD$ de altura h es:

$$\frac{50+20}{2} \cdot h = 35h$$

Como el triángulo AED y el trapecio $EBCD$ tienen la misma área, concluimos que cada uno tiene un área de $\dfrac{35}{2}h$.

Sea x la medida del segmento EB, por lo tanto, la medida del segmento AE es $50 - x$. Luego, el área del triángulo AED de altura h respecto a la base AE (coincidente con la altura del trapecio $ABCD$) es:

$$\frac{(50-x)\cdot h}{2} = \frac{35}{2}\cdot h$$
$$50 - x = 35$$

Luego $AE = 35$.

Problema 55. ¿Cuantos números n poseen la propiedad que exactamente uno de los números n o $n+20$ sea de 4 dígitos?

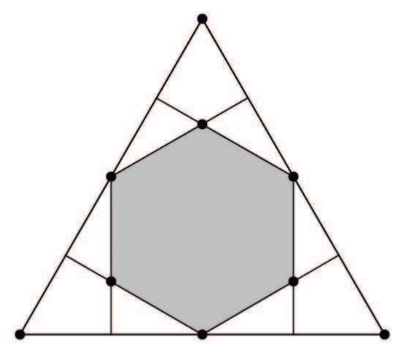
Solución:

Los números que cumplen la propiedad indicada en el enunciado son aquellos que o bien, al sumarle 20 pasan de ser un número de 3 dígitos a uno de 4 dígitos o que al sumarle 20 pasan de ser un número de 4 dígitos a uno de 5 dígitos.

- Los números n de tres dígitos que al sumarle 20 pasan a ser de 4 dígitos son: 980, 981, 982, ..., 999, en total 20 números.
- Los números n de cuatro dígitos que al sumarle 20 pasan a ser de 5 dígitos son; 9980, 9981, 9982, ..., 9999, en total 20 números.

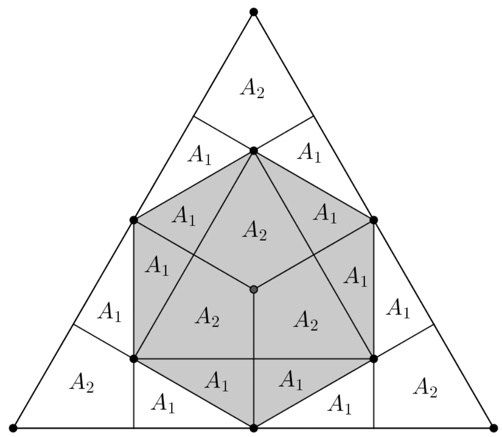
Por lo tanto, existen 40 números que cumplen la condición solicitada.

Problema 56. Para cada lado del triángulo equilátero de la figura se ha trazado el segmento desde el punto medio del lado que corta perpendicularmente al lado adyacente. ¿Qué fracción del área del triángulo inicial es el área del hexágono resultante?



Solución:

Notemos que al unir los puntos medios de los lados del triángulo equilátero se forman 4 triángulos equiláteros congruentes. Si a partir de los puntos medios se trazan las perpendiculares a los lados del triángulo mayor, notamos que dichas perpendiculares representan alturas, bisectrices, transversales de gravedad del triángulo. A partir de estas últimas (transversales de gravedad) se puede verificar que se intersectan en 3 vértices del hexágono y por propiedades de la transversal de gravedad, esta se divide en la razón 2:1 respecto del punto de intersección entre dos de ellas. Por lo anterior, el hexágono es regular.



Notemos que los deltoides ubicados en las esquinas del triángulo equilátero mayor, designados con A_2, son congruentes a los deltoides formados en el interior del hexágono, también designados con A_2, además los triángulos grises y blancos designados con A_1 también son congruentes. Finalmente, se infiere que, al tener 6 triángulos A_1 blancos y 6 triángulos A_1 grises, así como también, 3 deltoides A_2 blancos y 3 deltoides A_2 grises, la fracción que representa el hexágono respecto del triángulo equilátero original es $\dfrac{1}{2}$.

Problema 57. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos enteros positivos es 770. ¿Cuál es el mayor de estos tres números?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

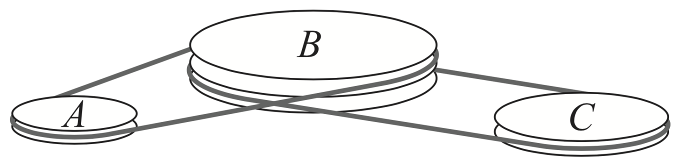
Solución:

Sea $n-1$, n y $n+1$, los 3 números consecutivos tales que:

$$\begin{aligned}(n-1)^2+n^2+(n+1)^2&=770\\ n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1&=770\\ 3n^2+2&=770\\ 3n^2&=768\\ n^2&=256\\ n&=16\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que el mayor de los 3 números es $n+1$, es decir, $16+1=17$.

Problema 58. Un sistema de transmisión por correa está formado por los discos giratorios A, B y C.



Cuando B completa 4 vueltas, A completa 5 y cuando B completa 6 y C completa 7 vueltas. Si el perímetro de C es 30 cm, ¿Cuál es el perímetro de A?

Solución:

La relación entre B y C, respecto de las vueltas que dan, es :

$$\frac{B}{C}=\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{2}=\frac{12}{14}.$$

La relación entre B y A, respecto de las vueltas que dan, es:

$$\frac{B}{A}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{12}{15}.$$

Cuando B logra dar 12 vueltas, entonces A y C dan 15 y 14 vueltas respectivamente. Por tanto, 14 vueltas de C corresponden a 15 vueltas de A. Esto quiere decir que 14 veces el perímetro de C es igual a 15 veces el perímetro de A. Sea P_A el perímetro de A, luego:

$$\begin{aligned}14\cdot 30\text{ cm}&=15\cdot P_A\\ 28\text{ cm}&=P_A\end{aligned}$$

Finalmente el perímetro de A es 28 cm.

Problema 59. Cuatro hermanos tienen diferentes alturas: Tobías es más bajo que Víctor por la misma longitud por la que él es más alto que Pedro. Oscar es más bajo que Pedro por la misma longitud también. Tobías mide 184 cm de alto y la estatura promedio de los cuatro hermanos es de 178 cm. ¿Cuál es la estatura de Oscar?

Solución:

Sea T la altura de Tobias, V la altura de Victor, P la altura de Pedro y O la altura de Oscar.

Si x es la longitud por la que Tobías es más bajo que Víctor se deduce que:

$$\begin{aligned} V &= T + x \\ T &= P + x \\ P &= O + x \end{aligned}$$

Luego, podemos expresar la altura de Victor, Tobías y Pedro a partir de la altura de Oscar.

$$\begin{aligned} V &= O + 3x \\ T &= O + 2x \\ P &= O + x \end{aligned}$$

Como el promedio de sus alturas es 178cm, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{V+T+P+O}{4} &= 178 \\ V+T+P+O &= 178 \cdot 4 \\ (O+3x)+(O+2x)+(O+x)+O &= 178 \cdot 4 \\ 4O + 6x &= 712 \end{aligned}$$

Por otra parte, Tobias mide 184 cm, eso significa que:

$$O + 2x = 184.$$

Por lo tanto podemos obtener la edad de oscar resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4O + 6x &= 712 \\ O + 2x &= 184 \end{aligned}$$

Multiplicando por -3 a ambos lados de la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 4O + 6x &= 712 \\ -3O - 6x &= -552 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que la altura de Oscar es 160 cm.

Problema 60. Llovio 7 veces en las vacaciones. Si llovía por la mañana estaba soleado en la tarde y si llovía en la tarde había sol en la mañana. Si hubo 5 mañanas soleadas y 6 tardes soleadas. ¿Cuánto duraron las vacaciones?

Solución:

Si llueve en la mañana o bien en la tarde, entonces en el horario contrario, tarde y mañana respectivamente, estará soleado. Así también, puede suceder que un día esté completamente soleado, es decir, tanto en la mañana como en la tarde.

Podemos inferir que al llover 7 veces en las vacaciones, significa que hay 7 días donde estuvo soleado ya sea de mañana o de tarde. Respecto a lo anterior, de las 11 instancias donde estuvo soleado (mañana y tarde), sobran 4 de ellas que no tuvieron relación con la lluvia, por lo tanto se concluye que esas instancias fueron días donde estuvo completamente soleado.

Luego, se infiere que 2 días estuvieron completamente soleados (2 mañanas soleadas y 2 tardes soleadas), por lo cual, 3 días llovió en la tarde y 4 días llovió en la mañana. Finalmente, las vacaciones duraron 9 días (7 que tenían lluvia de mañana o de tarde y 2 días completamente soleados).

Problema 61. Jenny decidió introducir números en las casillas de la tabla de 3×3 para que las sumas de los números en los cuatro cuadrados de 2×2 sean iguales. Los tres números en las casillas de la esquina ya se han escribo como se muestra en la figura. ¿Qué número debería escribir en la cuarta esquina marcada con x?

1		3
2		x

Solución:

1	a	3
b	c	d
2	e	x

En la tabla anterior se cumplen las siguientes igualdades:

$$1 + a + b + c = a + 3 + c + d$$
$$1 + a + b + c = b + c + 2 + e$$
$$1 + a + b + c = c + d + e + x$$

De la primera ecuación se deduce:

$$1 + a + b + c = a + 3 + c + d$$
$$1 + b = 3 + d$$
$$2 + b = d$$

De la segunda ecuación se deduce:

$$1 + a + b + c = b + c + 2 + e$$
$$1 + a = 2 + e$$
$$a - 1 = e$$

Reemplazando d y e en la tercera ecuación se obtiene que:

$$1 + a + b + c = c + 2 + b + a - 1 + x$$

Concluyendo que $x = 0$.

Problema 62. Siete números naturales a, b, c, d, e, f y g se escriben en una fila. La suma de todos ellos es igual a 2017. Cualesquiera dos números vecinos difieren en ± 1. ¿Cuál de los números pude ser igual a 286?

Solución:

Al ser 7 números que suman 2017 y que difieren con sus vecinos en una unidad, conviene determinar el valor de cada número y a partir de esto, buscar las combinaciones que cumplan lo especificado en el enunciado.

Notemos que, si dividimos 2017 en 7 se obtiene cociente 288 y resto 1. Por lo tanto, los siguientes números cumplen con sumar 2017:

$$288,\ 288,\ 288,\ 289,\ 288,\ 288,\ 288$$

Para que nuestra lista también cumpla que dos números vecinos difieren en ± 1, dejando 289 en el centro, pues de esta manera los 288 que están a su derecha e izquierda cumplen la condición de diferir en una unidad. Luego basta con sumar y restar unidades en las posiciones siguientes de manera de mantener la suma igual a 2017.

$$\begin{array}{ccccccc} 288+2 & 288+1 & 288 & 289 & 288 & 288-1 & 288-2 \\ 290 & 289 & 288 & 289 & 288 & 287 & 286 \end{array}$$

Por lo tanto una opción es que g sea 286. Por simetría en la acción realizada (sumar y restar 1, sumar y restar 2), se concluye que a también puede ser 286.

Problema 63. Hay cuatro niños con edades enteras menores a 18 años y diferentes entre sí. El producto de sus edades es 882. ¿Cuál es la suma de sus edades?

Solución:

Sean a, b, c y d las edades de los cuatro niños respectivamente. Se sabe que todas son menores a 18 y que el producto de ellas da por resultado 882. Notemos que la descomposición de 882 es:

$$882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 7) \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1$$

Siendo 14, 9, 7 y 1 la única combinación posible que cumple las condiciones del enunciado. Siendo $14 + 9 + 7 + 1 = 31$ la suma de las edades.

Problema 64. En las caras de un dado aparecen los números: -3, -2, -1, 0, 1, 2 si se lanza dos veces y se multiplican los resultados, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

Solución:

Sea A el evento de obtener un producto negativo al lanzar dos veces el dado. Denotaremos por (D_1, D_2) al par ordenado donde el producto de las coordenadas es un número negativo. Dichos pares serán:

$$(-3, 1);\ (-3, 2);\ (-2, 1);\ (-2, 2);\ (-1, 1);\ (-1, 2)$$

$$(1, -3);\ (1, -2);\ (1, -1);\ (2, -3);\ (2, -2);\ (2, -1).$$

Como el dado tiene 6 caras, se tienen $6 \cdot 6 = 36$ casos posibles. Por lo tanto, la probabilidad de que el producto sea negativo es:

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Problema 65. Dado un número ab de dos dígitos a y b, al repetir el par de dígitos 3 veces se obtiene un número de 6 dígitos $ababab$. Calcule por que números este número de 6 dígitos es divisible.

Solución:

Denotaremos el número de 6 dígitos *ababab* como $\overline{ababab}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned}\overline{abab} &= 1000a + 100b + 10a + b\\ &= 1010a + 101b\\ &= 101(10a+b)\\ &= 101\overline{ab}\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\overline{ababab} &= 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b\\ &= 101010a + 10101b\\ &= 10101(10a+b)\\ &= 10101\overline{ab}\end{aligned}$$

Como $10101 = 7 \cdot 3 \cdot 481$, por lo tanto el número $\overline{ababab}$ es siempre divisible por:

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 7\cdot 3, \quad 481, \quad 3\cdot 481, \quad 7\cdot 481, \quad 7\cdot 3\cdot 481$$

Problema 66. Daniel quiere usar una contraseña especial de 7 dígitos. Cada dígito de la contraseña se repite tantas veces como lo indica la misma cifra y estos siempre van de forma consecutiva. Por ejemplo: 4444333 o 1666666. ¿Cuantas contraseñas distintas puede elegir?

Solución:

Si consideramos que el número tenga una sola cifra, la única opción es que sea 7. Por tanto una opción es 7777777.

Si consideramos que la contraseña esté compuesta por 2 cifras únicamente, esas cifras deben sumar 7, es decir $1+6=7$, $2+5=7$, $3+4=7$. Por lo tanto, las posibles contraseñas son:

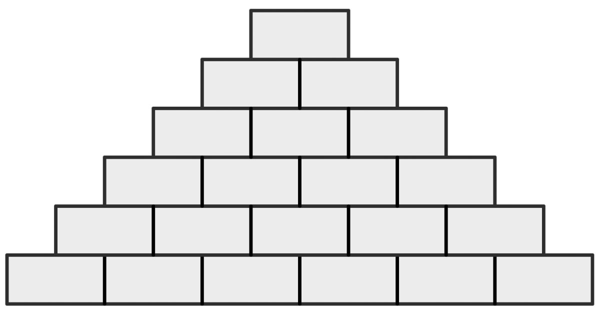
- 1666666
- 2255555
- 3334444
- 6666661
- 5555522
- 4444333

Si consideramos que la contraseña esté compuesta por 3 cifras únicamente, las opciones son aquellas que sumadas dan 7, es decir, $1+2+4=7$. Por lo tanto, las posibles contraseñas son:

- 1224444
- 2214444
- 4444122
- 1444422
- 2244441
- 4444221

En total existen 13 opciones.

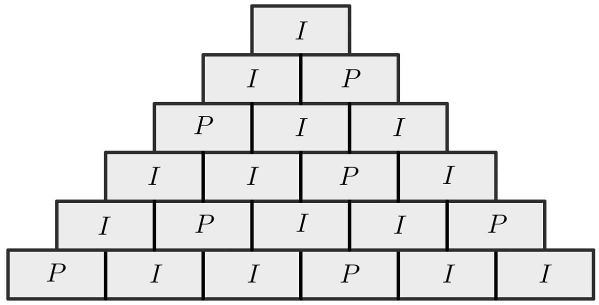
Problema 67. Pablo quiere escribir un número natural en cada casilla del diagrama de tal manera que cada número sea la suma de los dos números en las casillas inmediatamente inferiores. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares que puede escribir Pablo?



Solución:

Recordemos que un número Impar se puede obtener como suma de un número Par y uno Impar. Por su parte, un número par se puede obtener a partir de la suma de dos impares o bien de dos pares. Como la condición es obtener la mayor cantidad de números impares, escribiremos cada número Par como suma de dos números impares.

Si comenzamos desde la casilla superior con un número impar y vamos realizando el proceso inverso, es decir, identificar qué tipo de número eran los anteriores (empleando símbolos P: par e I: impar), determinaremos la cantidad máxima de números impares que pueden ser escritos. De esta forma se obtiene la siguiente pirámide.



Luego, la mayor cantidad de números impares que pueden ser escritos en la pirámide son 14.

Problema 68. Luisa sumó los ángulos interiores de un polígono convexo. Ella olvidó sumar uno de los ángulos y por eso el resultado fue 2017°. ¿Qué ángulo olvidó Luisa?

Solución:

Sea n el número de lados del polígono convexo. Se sabe que la fórmula para determinar la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo es $180 \cdot (n-2)$. Si consideramos que x es el ángulo que Luisa olvidó, entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} 180 \cdot (n-2) &= 2017 + x \\ n - 2 &= \frac{2017}{180} + \frac{x}{180} \end{aligned}$$

Como $n-2$ es un número natural, $\dfrac{2017}{180} + \dfrac{x}{180}$ también debe ser un número natural.

En efecto, $\dfrac{2017}{180}$ truncado es 11,2, por lo tanto $n-2$ debe ser el número natural más próximo y superior a 11,2. Es decir, 12. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores del polígono convexo es $180° \cdot 12 = 2160°$.

Como Luisa sumó 2017°, le faltan 143° para completar los 2160° . Es decir que $x = 143°$.

Problema 69. Hay 30 bailarines de pie en un círculo, mirando hacia el centro. Cuando se dice "izquierda", algunos bailarines se voltean mirando hacia la izquierda y todos los demás hacia la derecha. Los que estaban frente a frente se saludaron y estos resultaron ser 10. Luego cuando se dice "alrededor", todos los bailarines hicieron media vuelta. ¿Cuántos se saludaron al decir "alrededor"?

Solución:

Notemos que si en el círculo hubiese solo 3 personas, tenemos al menos uno que mira hacia la izquierda y al menos uno que mira hacia la derecha, así que el tercero necesariamente deberá apuntar a una de las direcciones anteriores, por tanto el círculo con 3 personas tiene 2 direcciones. Es claro que dos de ellos se saludarán, por lo tanto habrá 1 saludo y al momento de decir "alrededor", la persona que no obtuvo saludo, saludará.

Definamos "cambio de dirección" como el momento en donde el sujeto siguiente se encuentra mirando en una dirección diferente a la de la persona anterior.

Si fuesen 4 personas, tenemos al menos uno que mira hacia la izquierda y al menos uno que mire hacia la derecha, independientemente de esto, solo se puede dar que haya 2 cambios de direcciones:

- 1 hacia derecha y 3 hacia la izquierda consecutivamente
- 1 hacia la izquierda y 3 hacia la derecha consecutivamente
- 2 hacia la derecha consecutivamente y 2 hacia la izquierda consecutivamente

O bien, que haya 4 cambios de direcciones:

- Izquierda-derecha-izquierda-derecha

En todos los casos anteriores, se cumple que tanto la cantidad de saludos al inicio y al final, al escuchar "alrededor" es la mitad de la cantidad de cambios de direcciones. Por ejemplo, si en el círculo hay 16 cambios de direcciones, entonces habrá 8 saludos iniciales y al escuchar la palabra "alrededor" habrá 8 saludos.

En conclusión, si de los 30 bailarines, hubo 10 saludos inicialmente, al escuchar la palabra “alrededor”, habrá 10 saludos finales.

Problema 70. En una balanza se ponen 3 masas de distinto peso en cada lado, estas pesan 101, 102, 103, 104, 105 y 106 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que la masa de 106 gramos este en el lado más pesado?

Solución:

Las 6 masas distintas pesan un total de $101+102+103+104+105+106 = 621$ gramos, por lo tanto si un lado pesa 311 gramos o más, corresponderá al lado más pesado.

Notemos que es posible despreciar los 100 gramos de cada masa, pues lo que hace la diferencia entre las masas es la cifra de las unidades de cada masa.

Si el platillo derecho fuera el que contiene el mayor peso, las de 3 masas distintas se puede distribuir en los platillos de la siguiente manera:

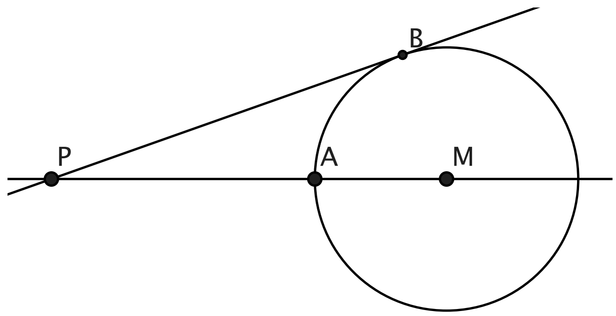
Platillo izquierdo	Platillo derecho
1+2+3	4+5+6
1+2+4	3+5+6
1+2+5	3+4+6
1+2+6	3+4+5
1+3+4	2+5+6
1+3+5	2+4+6
1+3+6	2+4+5
1+4+5	2+3+6
1+4+6	2+3+5

De las 10 combinaciones, notemos que 8 de ellas cumplen con que 6 está en el platillo de suma mayor, es decir 8 de ellas cumplen con que la masa de 6 gramos está en el platillo mas pesado.

Si el platillo izquierdo fuera el que contiene el mayor peso, tendríamos una tabla simétrica a la anterior, es decir, 8 combinaciones que cumplirán con que la masa de 6 gramos esté en el platillo más pesado.

Luego la probabilidad de que la masa de 106 gramos esté en el lado más pesado es $\dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$.

Problema 71. Los puntos A y B pertencen a una circunferencia de centro M. Dado un punto P exterior a la circunferencia se sabe que PB es tangente a la circunferencia en B y las distancias PA y MB son enteras. Si $PB = PA + 6$, ¿Cuántos valores posibles hay para MB?



Solución:

Sea r al radio de la circunferencia. Por el teorema de la tangente-secante, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{PB}^2 &= \overline{PA} \cdot (PA + 2r) \\
(\overline{PA} + 6)^2 &= \overline{PA}^2 + 2 \cdot \overline{PA} \cdot r \\
\overline{PA}^2 + 12 \cdot \overline{PA} + 36 &= \overline{PA}^2 + 2 \cdot \overline{PA} \cdot r \\
6 \cdot \overline{PA} + 18 &= \overline{PA} \cdot r \\
6 + \frac{18}{\overline{PA}} &= r
\end{aligned}$$

Dado que $\overline{MB} = r$ y $\overline{PA}$ son medidas enteras positivas, la cantidad de valores para $\overline{MB}$ dependerá de la cantidad de valores enteros que dividen a 18.

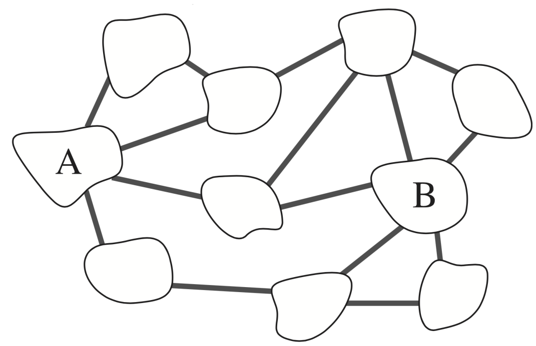
Al determinar los divisores de 18 se obtiene que $\overline{PA}$ puede tomar los valores 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Por lo tanto, $\overline{MB}$ puede tomar 6 valores enteros distintos.

Problema 72. A Vicente le gusta jugar con sus trenes de juguete. Vicente ha moldeado una figura en miniatura de su hermano, empleando la escala $1:87$ dicha figura mide 2 cm. ¿Cuál es la altura real de su hermano?

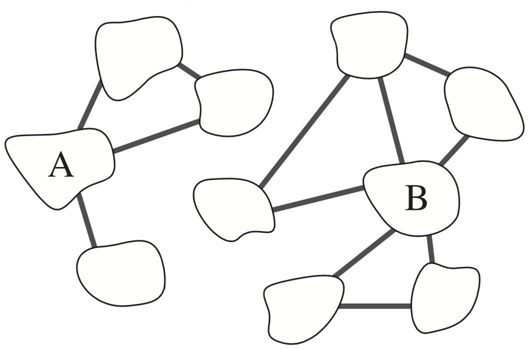
Solución:

Si la figura en miniatura del hermano de Vicente es de 2 cm y está hecha a escala según la razón $1:87$, entonces la altura real del hermano de Vicente es 87 veces la estatura de la figura en miniatura, es decir, $87 \bullet 2 = 174$ cm.

Problema 73. En la figura se muestran 10 islas que están conectadas por 15 puentes, donde sólo se puede transitar de una isla a otra por medio de estos. ¿Cuál es el menor número de puentes que deben ser eliminados de manera que sea imposible ir de A hasta B?



Solución:



Bastará con eliminar 3 puentes, por ejemplo los que se marcan en la siguiente figura. De esta forma, no es posible ir desde A hasta B.

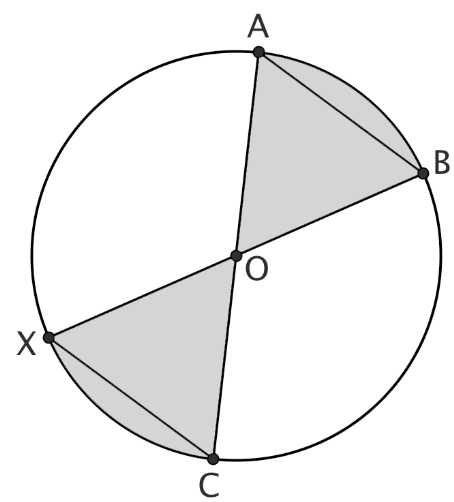
Problema 74. Dos números positivos, a y b, son tales que el $75\,\%$ de a es igual al $40\,\%$ de b. ¿Cuál es el valor de a con respecto a b

Solución:

Si el 75 % de a es igual al 40 % de b, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{75}{100}a &= \frac{40}{100}b\\ 75a &= 40b\\ a &= \frac{40}{75}b\\ a &= \frac{8}{15}b\end{aligned}$$

Problema 75. En un círculo con centro en O y diámetro AC se traza el diámetro BX tal que $OA = AB$. ¿Cuál es la porción de área del círculo que está sombreada?



Solución:

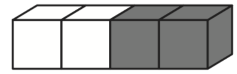
El triángulo $\triangle OBA$ es equilátero pues OA y OB son radios y porque sabemos que $OB = BA$, luego por transitividad se tiene que, $OA = OB = BA$.

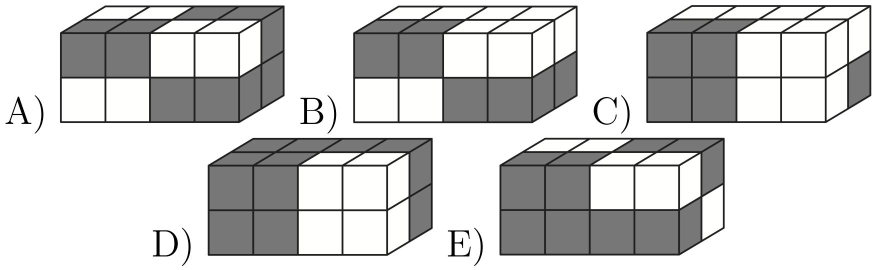
El ángulo $\angle COX$ mide $60°$ al ser opuesto por el vértice con el ángulo $\angle AOB$. Luego, el triángulo $\triangle OCX$ es equilátero.

Por lo anterior el área sombreada es $120\pi r^2$ y el área total es $360\pi r^2$. Por lo tanto la razón entre las áreas es:

$$\frac{120\pi r^2}{360\pi r^2} = \frac{1}{3}$$

Problema 76. Una barra está compuesta por 2 cubos blancos y 2 cubos grises pegados tales que resulta una barra de $4 \times 1 \times 1$. Ambos cubos blancos fueron pegados en el costado izquierdo de la barra y los cubos grises en el costado derecho, como lo muestra la figura. ¿Qué figura puede ser construida a partir de 4 barras iguales de $4 \times 1 \times 1$?





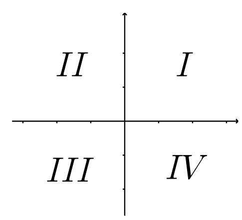
Solución:

Notemos que las alternativas (D) y (E) no pueden ser solución pues en la parte superior e inferior, respectivamente, hay barras de $4 \times 1 \times 1$ que son de un mismo color (grises) y debemos recordar que cada barra de $4 \times 1 \times 1$ está construida con 2 cubos blancos y dos cubos grises.

Así también, notemos que (B) y (C) no pueden ser solución pues en la parte superior e inferior, respectivamente, hay barras de $4 \times 1 \times 1$ que son de un mismo color (blancas).

Finalmente, la figura que puede ser construida es (A).

Problema 77. ¿Cuál de los cuadrantes del plano cartesiano no contiene ningún punto de la gráfica de la función lineal $f(x) = -3,5x + 7$?



Solución:

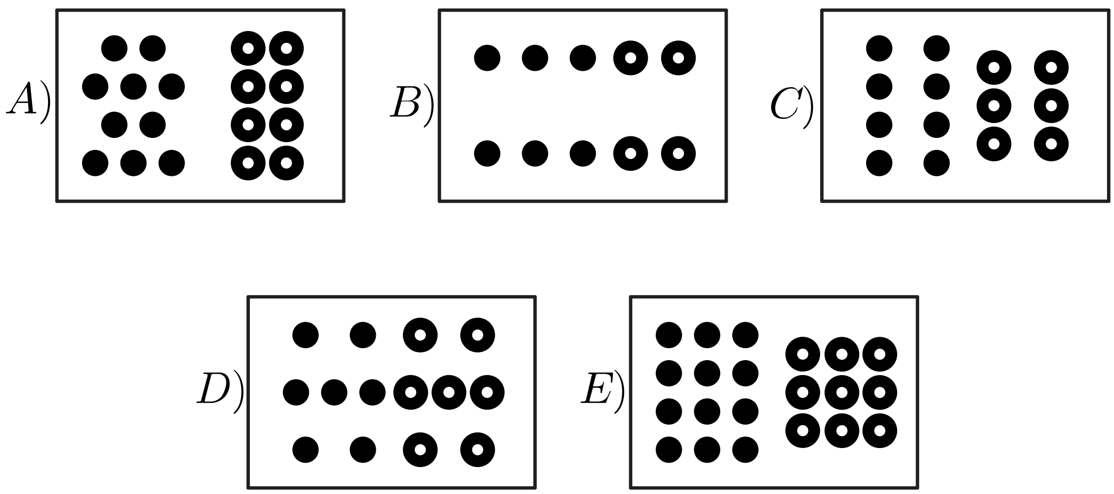
Recordemos que una recta se puede trazar si se conocen dos puntos de ella. Notemos que la recta $y = -3,5x + 7$ tiene coeficiente de posición 7, por lo cual intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, 7)$.

Si consideramos $y = 0$, tendremos el valor de la ordenada del punto que intersecta al eje x. En efecto,

$$-3,5x + 7 = 0 \rightarrow x = 2$$

Luego, la recta pasa por los puntos $(2,0)$ y $(0,7)$ y al trazar la recta que pasa por esos puntos, notamos que la recta jamás pasa por el cuadrante III.

Problema 78. Cada una de las siguientes cajas contiene pelotas negras y blancas como lo muestra su etiqueta. Daniela quiere extraer una bola de las cajas sin mirar. ¿De qué caja debe extraer la bola de manera que tenga la mayor probabilidad de obtener una de color negro?



Solución:

Es lógico pensar que la caja que contenga en mayor proporción bolas negras que blancas tendrá una más alta probabilidad. Es por esta razón que descartamos la opción D. La probabilidad de sacar una bola negra en la caja i, siendo $i = A, B, C, E$.

$$P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,\overline{5}$$
$$P(B) = \frac{6}{10} = 0,6$$
$$P(C) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} = 4/7 \approx 0,57$$
$$P(E) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} = 4/7 \approx 0,57$$

Se concluye que la bola negra debe ser extraída de la caja B.

Problema 79. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene la mayor cantidad de puntos en común con la función $f(x) = x$?

A) $g_1(x) = x^2$ B) $g_2(x) = x^3$ C) $g_3(x) = x^4$ D) $g_4(x) = -x^4$ E) $g_5(x) = -x$

Solución:

Para determinar los puntos en común entre dos funciones, debemos buscar todas aquellas intersecciones que se generan lo cual algebraicamente se expresa como la condición de igualar. En efecto, se tiene que:

- Para $g_1(x) = x^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

  Donde las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$, por lo tanto se obtienen dos puntos de intersección.

- Para $g_2(x) = x^3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ x(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

  Donde las soluciones son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, por lo tanto se obtienen tres puntos de intersección.

- Para $g_3(x) = x^4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x^4 &= x \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3-1) &= 0 \\ x(x-1)(x^2+x+1) &= 0 \end{aligned}$$

  Donde las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$, por lo tanto se obtienen dos puntos de intersección, pues $x^2 + x + 1 \neq 0$ para todo x real.

- Para $g_4(x) = -x^4$, se tiene que:

$$\begin{aligned} -x^4 &= x \\ -x^4 - x &= 0 \\ -x(x^3+1) &= 0 \\ -x(x+1)(x^2-x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Donde las soluciones son $x = 0$ y $x = -1$, por lo tanto se obtienen dos puntos de intersección, pues $x^2 - x + 1 \neq 0$ para todo x real.

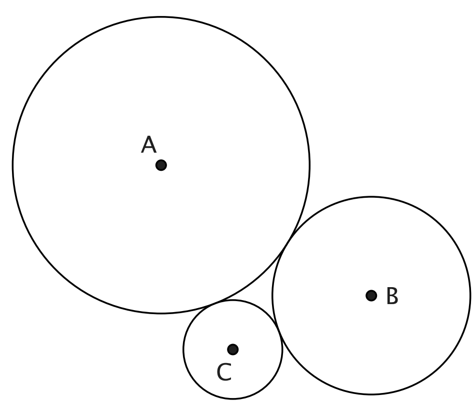
- Para $g_5(x) = -x$, se tiene que:

$$\begin{aligned} -x &= x \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

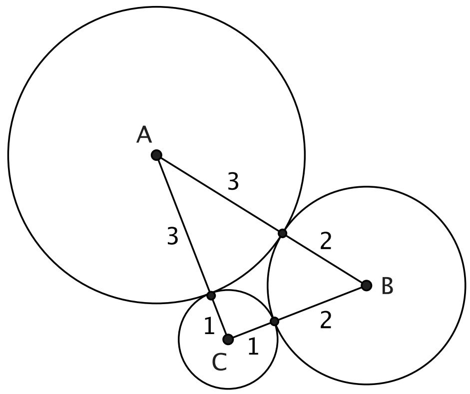
Donde la única solución es $x = 0$, por lo tanto se obtiene un solo punto de intersección.

Luego, la función que tiene la mayor cantidad de puntos en común con la función $f(x) = x$ es $g_2(x)$.

Problema 80. Tres círculos de centro A, B y C respectivamente son tangentes entre sí y tienen radios 3, 2 y 1 respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$?



Solución:



Notemos que la medida de los lados del triángulo ABC es conocida, pues conocemos la medida de los radios. Como los lados de este triángulo miden 5, 4 y 3 unidades, sabemos que es un triángulo rectángulo.

Luego, el área de dicho triángulo es: $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Problema 81. El número positivo p es menor que 1, y el número q es mayor que 1. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $p \cdot q$ B) $p + q$ C) $\dfrac{p}{q}$ D) p E) q

Solución:

- Como $p < 1$, si multiplicamos por q a ambos lados de la desigualdad obtenemos que $p \cdot q < q$.
- Como $p < 1$ y $q > 1$, entonces $\frac{p}{q} < 1$.
- Como p y q son números positivos se cumple que $p + q > q$ y también que $p + q > p$.

Por lo anterior podemos decir que $p < q$, $p \cdot q < q$, $\frac{p}{q} < q$, por lo tanto descartamos las alternativas A), C) y D).

Pero $q < p + q$. Finalmente $p + q$ es el número mayor.

Problema 82. Dos cilindros A y B tienen el mismo volumen. El radio de la base del cilindro B es un 10 % mayor que el radio de la base del cilindro A. ¿Cuánto mayor es la altura del cilindro A respecto de la altura del cilindro B?

Solución:

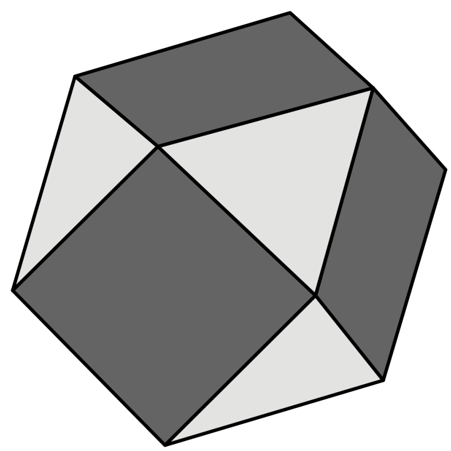
Notemos que podemos establecer la relación $R_B = \dfrac{11}{10}R_A$, siendo R_A y R_B, los radios de los cilindros respectivos.

Sea h_a la altura del cilindro A y h_b la altura del cilindro B. Como los cilindros A y B tienen el mismo volumen se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot R_A^2 \cdot h_A &= \pi \cdot R_B^2 \cdot h_B \\
R_A^2 \cdot h_A &= \left(\frac{11}{10}R_A\right)^2 \cdot h_B \\
R_A^2 \cdot h_A &= \frac{121}{100}R_A^2 \cdot h_B \\
h_A &= \frac{121}{100}h_B
\end{aligned}$$

Finalmente, la altura del cilindro A es un 21 % mayor que la altura del cilindro B.

Problema 83. Las caras del poliedro que se muestra en la figura son triángulos o cuadrados. Cada cuadrado está rodeado por 4 triángulos y cada triángulo está rodeado por 3 cuadrados. Si hay 6 cuadrados, determine cuántos triángulos hay.



Solución:

Cada arista del poliedro es el lado de un cuadrado y de un triángulo simultáneamente, ya que por cada lado del cuadrado hay un triángulo y por cada lado de un triángulo hay un cuadrado, entonces como hay 6 cuadrados, hay $6 \cdot 4 = 24$ aristas, y en consecuencia, $24 \div 3 = 8$ triángulos.

Problema 84. Tenemos cuatro dados con forma de tetraedro regular, perfectamente balanceados, con sus caras numeradas con 2, 0, 1 y 7. Si lanzamos los 4 dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2017 usando exactamente uno de los 3 números visibles de cada dado?

Solución:

Sea A es el evento de obtener el número 2017 usando exactamente uno de los 3 números visibles de cada dado, entonces A^c es el evento de no obtener el número 2017, donde la única manera de que no se pueda formar el número 2017 es que todas las caras no visibles coincidan en el mismo número.

Sea B_i el evento de obtener en todas las caras no visibles el número $i = 0,\ 1,\ 2,\ 7$. Luego:

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_7) \\ &= P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_7) \\ &= \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \\ &= \frac{4}{256} \\ &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Problema 85. El polinomio $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ tiene coeficientes enteros a y b. ¿Cuál de los siguientes números se puede asegurar que no es una raíz del polinomio?

A) 1 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

Solución:

El conjunto de posibles soluciones racionales del polinomio de coeficientes enteros está dado por:

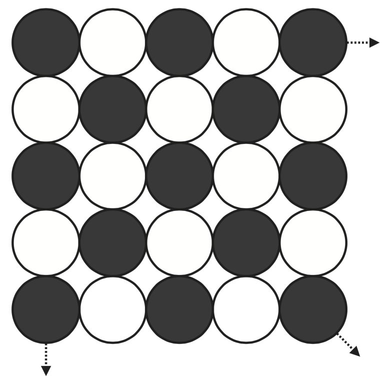
$$X = \frac{D(24)}{D(5)}$$

Siendo $D(n)$ los divisores enteros de n, donde:

$$D(24) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$$
$$D(5) = \{\pm 1, \pm 5\}$$

Luego, ninguna fracción de la forma $\dfrac{D(24)}{D(5)}$ da por resultado 5. Por lo tanto, 5 jamás podrá ser una raíz del polinomio de coeficientes enteros.

Problema 86. Julia tiene 2017 fichas, 1009 de ellas son negras y el resto son blancas. Los coloca en un patrón cuadrado como se muestra en la figura, comenzando con una ficha negra en la esquina superior izquierda, alternando colores en cada fila y cada columna. ¿Cuántas fichas de cada color quedan después de haber completado el mayor cuadrado posible?



Solución:

Notemos que si el cuadrado es de $n \times n$, entonces:

- Si n es par, se ocuparán $\dfrac{n^2}{2}$ fichas blancas y $\dfrac{n^2}{2}$ fichas negras.
- Si n es impar, se ocuparán $\dfrac{n^2-1}{2}$ fichas blancas y $\dfrac{n^2+1}{2}$ fichas negras.

Al tener 1009 fichas negras y 1008 fichas blancas, se tiene que el mayor cuadrado posible que se puede formar utilizando esta cantidad de piezas es un cuadrado de 44×44.

Si $n = 44$, entonces la cantidad de fichas negras es igual a la cantidad de fichas blancas utilizadas. Este número corresponde a $\dfrac{44^2}{2} = 968$ fichas blancas y 968 fichas negras.

Finalmente, sobran $1008 - 968 = 40$ fichas blancas y $1009 - 968 = 41$ fichas negras.

Problema 87. Dos números consecutivos son tales que la suma de los dígitos de cada uno de ellos es múltiplo de 7. ¿Por lo menos cuántos dígitos tiene el número más pequeño?

Solución:

En general, dos números consecutivos cumplirán con que la suma de sus dígitos difiere en una unidad, por ejemplo para los números 23 y 24, la suma de sus dígitos son 5 y 6 respectivamente. Esto se cumple exceptuando aquellos casos en donde el menor termina en 9 y por lo tanto el mayor termina en 0, por ejemplo para los números 19 y 20, la suma de los dígitos de 19 es 10, mientras que la de 20 es 2.

Por lo tanto, el número que buscamos debe ser un número que termine en 9 y que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 7. Así también, su sucesor debe terminar en 0 y cumplir con que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 7. El primer caso, en donde el sucesor es un número que termina en 0 y la suma de sus cifras es múltiplo de 7 es 70.

Analicemos 69 y 70. La suma de los dígitos de 69 es 15 y de 70 es 7. Estos difieren en 8 unidades.

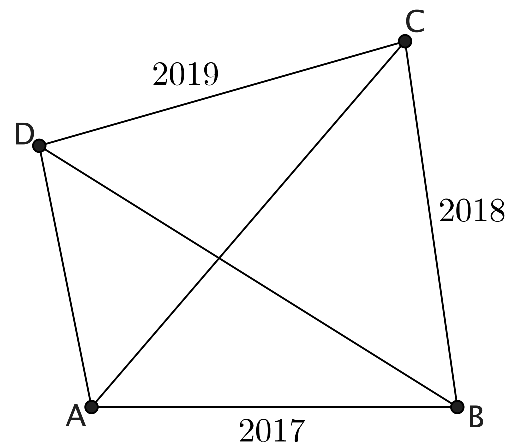
Si agregamos una cifra 9 al número menor, es decir, a 69, se formaría el número 699 y su sucesor sería el número 700. La suma de los dígitos de 699 es 24 y de 700 es 7. Estos difieren en 17 unidades.

Si añadimos una cifra 9 más al número menor, es decir, a 699, nos percatamos de que la suma de los dígitos aumentará en 9. Por lo tanto, debemos agregar tantos nueves de manera que al sumar 6, de por resultado un múltiplo de 7.

- $6 + 9 = 15$
- $6 + 9 + 9 = 24$
- $6 + 9 + 9 + 9 = 33$
- $6 + 9 + 9 + 9 + 9 = 42$

Por lo tanto, como 42 es múltiplo de 7, el número 69999 es el primer caso que cumple con que la suma de sus dígitos es múltiplo de 7 y la suma de los dígitos de su sucesor también. Finalmente, el número más pequeño tiene 5 dígitos.

Problema 88. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las diagonales son perpendiculares. Los lados tienen medidas $AB = 2017$, $BC = 2018$ y $CD = 2019$. ¿Cuál es la longitud de AD?



Solución:

Sea O la intersección entre ambas diagonales. Como las diagonales son perpendiculares entre sí, entonces es posible utilizar el teorema de Pitágoras en cada uno de los lados triángulos formados.

$$\begin{aligned} OD^2 + OC^2 &= 2019^2 \\ OC^2 + OB^2 &= 2018^2 \\ OA^2 + OB^2 &= 2017^2 \end{aligned}$$

Si sumamos la primera y tercera ecuación, se obtiene: $OD^2 + OC^2 + OA^2 + OB^2 = 2019^2 + 2017^2$ Pero, por la segunda ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} OD^2 + OA^2 &= 2019^2 + 2017^2 - 2018^2 \\ &= (2018 + 1)^2 + (2018 - 1)^2 - 2018^2 \\ &= 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 + 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 \\ &= 2018^2 + 2 \end{aligned}$$

Como $AD^2 = OD^2 + OA^2 = 2018^2 + 2$ se obtiene que $AD = \sqrt{2018^2 + 2}$.

Problema 89. Nico el Canguro trata de ser sincero, pero para él, mentir es demasiado divertido y cada tres frases que él dice, una de ellas es falsa y el resto es verdad. (A veces comienza con una mentira y a veces con una o dos afirmaciones verdaderas). Nico está pensando en un número de dos dígitos y le está diciendo a su amigo las siguientes afirmaciones:

- Uno de sus dígitos es 2.
- Es mayor que 50.
- Es un número par.
- Es menor a 30.
- Es divisible por 3.
- Uno de sus dígitos es 7.

¿Cuál es la suma de los dígitos del número que Nico está pensando?

Solución:

En la siguiente tabla se exponen los posibles caminos de Nico respecto a la veracidad de sus afirmaciones.

Uno de sus dígitos es un 2	V	V	F
Es mayor a 50	F	V	V
Es un número par	V	F	V
Es menor a 30	V	V	F
Es divisible por 3	F	V	V
Uno de sus dígitos es 7	V	F	V

Notemos que la primera columna no es posible pues el número de 2 dígitos debiese ser, o bien 27 o bien 72. Luego al ser menor a 30, debiese ser 27 pero se contradice con las afirmaciones respecto a ser número par y divisible por 3.

La segunda columna no es posible pues se contradicen las afirmaciones mayor a 50 y menor a 30.

Se tiene finalmente que la tercera columna es la única opción, siendo 78 el número de dos dígitos que Nico el Canguro está pensando. Luego la suma de los dígitos del número es $7 + 8 = 15$.

Problema 90. ¿Cuántos números enteros positivos cumplen la propiedad siguiente: El número que se obtiene al eliminar el dígito de las unidades es $\frac{1}{14}$ del número original?

Solución:

Los números enteros que cumplan la propiedad deben tener como mínimo 2 dígitos. Sea el número $\overline{ab}$ con dígitos a y b, como queremos que $\frac{1}{14}\overline{ab} = a$ se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= 14a \\ 10a + b &= 10a + 4a \\ b &= 4a \end{aligned}$$

Si consideramos $a = 1$, entonces $b = 4$. Si consideramos $a = 2$, entonces $b = 8$. Es decir los números 14 y 28 cumplen la condición que queremos.

Estudiemos ahora si existe un número de 3 dígitos que cumpla la condición. Sea el número $\overline{abc}$ con dígitos a, b y c, como queremos que $\frac{1}{14}\overline{abc} = ab$

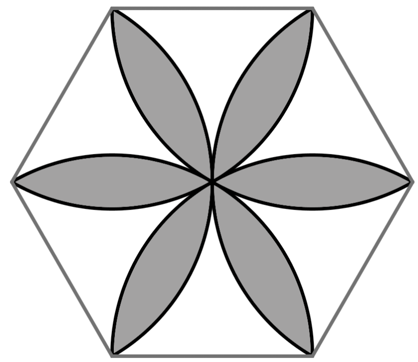
$$\begin{aligned} \frac{1}{14}abc &= ab \\ abc &= 14ab \\ 100a + 10b + c &= (10 + 4)(10a + b) \\ 100a + 10b + c &= 100a + 10(4a + b) + 4b \\ 100a + 10b + c &= 100a + 10(4a + b) + 4b \\ 10b + c &= 10(4a + b) + 4b \end{aligned}$$

Como el número $10b + c$ (con unidad c y decena b) es igual al número $10(4a + b) + 4b$ (con unidad $4b$ y decena $4a + b$) se concluye que:

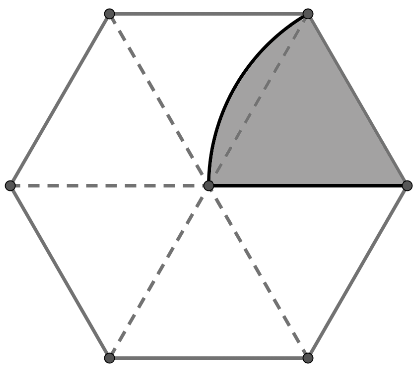
$$\begin{aligned} b &= 4a + b \\ c &= 4b \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene que $a = 0$, por lo tanto, el número $\overline{abc}$ es un número de 2 cifras, concluyendo que si el número fuese de más dígitos, no existirán más casos donde se cumpla la propiedad. Finalmente, sólo los números 14 y 28 cumplen la propiedad indicada.

Problema 91. La imagen muestra un hexágono regular con sus lados de longitud igual a 1. La flor de 6 pétalos fue construida con sectores circulares de radio 1 y centros en los vértices del hexágono. ¿Cuál es el área de la flor de 6 pétalos?



Solución:



Notemos que el hexágono regular está compuesto por 6 triángulos equiláteros. Para conocer el área de la flor de 6 pétalos, basta determinar el área de la mitad de uno de los pétalos empleando el sector circular y el área del triángulo equilátero.

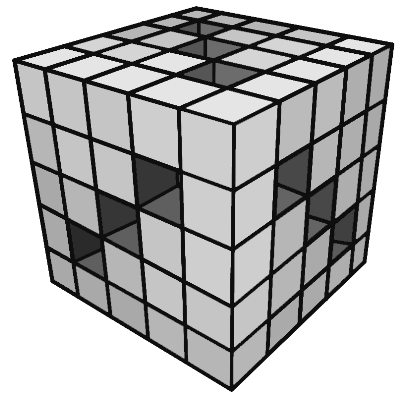
Esto significa que 12 mitades de pétalo forman la flor de 6 pétalos. Luego:

$$
\begin{aligned}
\text{área de mitad de pétalo} &= \text{área sector circular-área triángulo equilátero} \\
&= \frac{60^\circ \cdot \pi}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

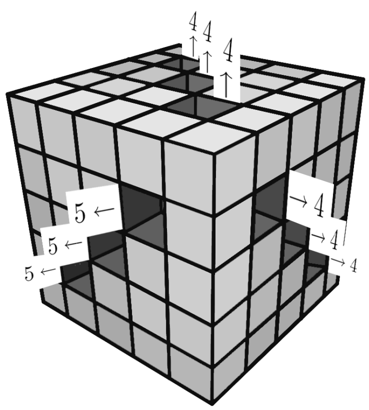
Finalmente, la flor de 6 pétalos equivale a 12 mitades de pétalo, por lo cual, su área será

$$12 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$$

Problema 92. Juan tiene un cubo de 5cm×5cm×5cm formado por muchos cubos pequeños de 1 cm^3 cada uno, su hermana le ha quitado 9 columnas completas de cubos como se muestra en la figura. Determina cuantos cubos pequeños retiró la hermana de Juan.



Solución



Podemos comenzar quitando tres columnas de 1×5 desde una de las caras, continuamos con otra de las caras y quitamos otras 3 columnas de 1×5, pero dichas columnas solo contendrán 4 cubitos pues cada una de ellas tendrá un espacio generado al quitar las primeras columnas, finalmente, desde una tercera cara quitamos otras 3 columnas las que también contendrán 4 cubitos.

Luego del cubo de $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubos pequeños, se han quitado $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 + 12 = 39$ cubos pequeños, quedando un total de $125 - 39 = 86$ cubos pequeños.

Problema 93. Considere la secuencia a_n, con $a_1 = 2017$ y $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. ¿Cuál es el valor de a_{2017}?

Solución:

Notemos que:

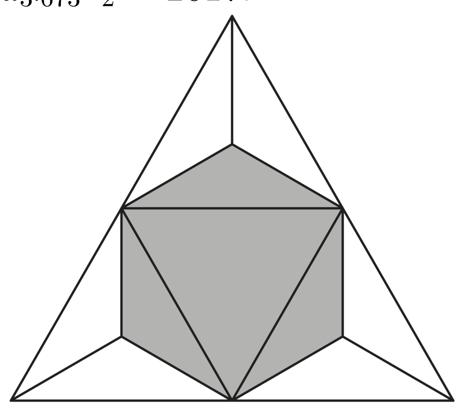
$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2017\\
a_2 &= \frac{2017-1}{2017} = \frac{2016}{2017}\\
a_3 &= \frac{\frac{2016}{2017-1}}{\frac{2016}{2017}} = \frac{-\frac{1}{2017}}{\frac{2016}{2017}} = -\frac{1}{2016}\\
a_4 &= \frac{-\frac{1}{2016}-1}{-\frac{1}{2016}} = \frac{-\frac{2017}{2016}}{-\frac{1}{2016}} = 2017
\end{aligned}
$$

La secuencia es cíclica, por lo cual, se tiene que:

- a_n con $n = 3k - 2$, darán por resultado 2017.
- a_n con $n = 3k - 1$, darán por resultado $\frac{2016}{2017}$.
- a_n con $n = 3k$, darán por resultado $-\frac{1}{2016}$.

Finalmente, es fácil comprobar que $a_{2017} = a_{3\cdot 673-2} = 2017$.

Problema 94. Considere un tetraedro regular, donde sus cuatro esquinas son cortadas por 4 planos, donde cada uno pasa por los puntos medios de 3 aristas adyacentes. ¿Qué parte del volumen del tetraedro original es el volumen del sólido resultante?



Solución:

Notemos que al realizar los cortes con los planos en las 4 esquinas del tetraedro regular. Se formarán 4 tetraedros congruentes, donde la arista y la altura de cada nuevo tetraedro miden la mitad de la respectiva arista y altura del tetraedro original.

El volumen buscado corresponde a la diferencia entre el volumen original y los 4 tetraedros congruentes. Supongamos que la arista del tetraedro original mide $2l$ y su altura es $2h$, por lo tanto, el volumen del tetraedro original es:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(2l)^2\sqrt{3}}{4}2h=\frac{8\sqrt{3}}{12}l^2h$$

Además el volumen del cada tetraedro formado después de trazar los planos es:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l^2h=\frac{\sqrt{3}}{12}l^2h$$

Como el volumen del sólido resultante es la diferencia entre el volumen del tetraedro original y el cuádruplo del volumen de cada tetradro formado por planos. Se concluye que el volumen del sólido resultante es.

$$\frac{8\sqrt{3}}{12}l^2h-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}l^2h=\frac{4}{12\sqrt{3}}l^2h$$

Finalmente, es claro notar que el volumen del solido corresponde a la mitad del volumen del tetraedro original.

Problema 95. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es 18. La suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a 128. ¿Cuál es el área del triángulo rectángulo?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Sean a, b los catetos y c la hipotenusa del triángulo rectángulo, tales que $a^2+b^2=c^2$. De esto se deduce que el área del triángulo será $\frac{ab}{2}$.

De las condiciones del enunciado se tiene que:

$$\begin{aligned} a+b+c&=18\\ a^2+b^2+c^2&=128 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)+c^2&=128\\ c^2+c^2&=128\\ 2c^2&=128\\ c^2&=64\\ c&=8 \end{aligned}$$

Por otra parte, de la primera ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 18 \\ a+b+8 &= 18 \\ a+b &= 10 \\ (a+b)^2 &= 100 \\ a^2+2ab+b^2 &= 100 \\ c^2+2ab &= 100 \\ 64+2ab &= 100 \\ 2ab &= 36 \\ \frac{ab}{2} &= 9 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que el área del triángulo es 9.

Problema 96. Daniela tiene 5 cajas, 5 bolas negras y 5 bolas blancas. Ella deposita las bolas en las cajas, donde cada caja debe contener al menos una bola. Daniela juega a apostar de la siguiente manera con su amiga Emilia: Si Emilia saca una pelota de una caja de su elección y gana si extrae una pelota blanca, de lo contrario, Daniela gana. ¿Cómo Daniela debe distribuir las bolas en las cajas para tener la mejor oportunidad de ganar?

Solución:

Sabemos que Daniela dispone de 5 cajas, por lo cual cada una tendrá un 20 % de probabilidad de ser elegida por Emilia, realizaremos el siguiente análisis para ir descubriendo la mejor distribución:

- Si ponemos una bola blanca y una negra en cada caja, independiente de la elección de Emilia ambas tienen la misma probabilidad de ganar.
- Si ponemos todas las bolas negras en tres cajas y todas las bolas blancas en dos cajas, entonces, tenemos que la probabilidad de ganarle es de $\frac{3}{5}$, equivalente a un 60 %.
- Si ponemos todas las bolas negras en cuatro cajas y todas las blancas en una sola caja, entonces, tenemos que la probabilidad de ganarle es de $\frac{4}{5}$, equivalente a un 80 %.

- Si ponemos una bola negra en cada caja y agregamos todas las bolas blancas en una caja, se tiene que las cajas 1, 2, 3 y 4 (sin pérdida de generalidad) son opciones seguras para ganar, es decir, ya acumulamos $\frac{4}{5}$ de opciones para ganar. Resta simplemente considerar que hay una bola negra dentro de la caja 5 donde están las 5 bolas blancas, es decir, el $\frac{1}{5}$ restante de probabilidad de ganar de Daniela se debe repartir entre las 6 bolas que están dentro de la caja, teniendo probabilidad $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ de obtener la bola negra en esa caja. Finalmente, la probabilidad de ganar es $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

En conclusión, la mejor opción es ubicar una pelota negra en cada caja y todas las blancas en una misma caja.

Problema 97. Nueve enteros se escriben en las celdas de una tabla de 3×3. La suma de los nueve números es igual a 500. Se sabe que los números en celdas vecinas (celdas que comparten un lado común) difieren en 1. ¿Cuál es el número en la celda central?

	?	

Solución:

Sabemos que la suma de los 9 números es 500, por tanto, al dividir 500 entre 9, se obtienen los posibles valores de las celdas.

$500 = 9 \cdot 55 + 5$, es decir, restan 5 unidades. Por lo tanto, los números que pueden ser empleados son:

$$56, 55, 56, 55, 56, 55, 56, 55, 56$$

Luego, en el centro y en las esquinas se debe escribir el mismo número, y como 56 se repite 5 veces, concluimos que este es el número del centro.

56	55	56
55	56	55
56	55	56

Notemos que existen otras configuraciones que cumplen lo pedido, pero siempre 56 queda en la casilla central.

56	55	56
55	56	57
54	55	56

Problema 98. Si $|x| + x + y = 5$ y $x + |y| - y = 10$, ¿Cuál es el valor de $x + y$?

Solución:

Caso 1: $x \geq 0$, $y \geq 0$ Se obtienen las ecuaciones $2x + y = 5$ y $x = 10$ respectivamente. Si $x = 10$, entonces $y = -15$, lo cual contradice las condiciones del caso 1. Por lo tanto, no hay solución para este caso.

Caso 2: $x \geq 0$, $y < 0$ Se obtienen las ecuaciones $2x+y = 5$ y $x-2y = 10$. Desarrollando el sistema de ecuaciones, se obtiene que $x = 4$ e $y = -3$. Luego, las soluciones anteriores cumplen con las condiciones del caso 2 y se verifica que $x + y = 1$.

Caso 3: $x < 0$,$y \geq 0$ Se obtienen las ecuaciones $y = 5$ y $x = 10$. Claramente el valor de x contradice las condiciones del caso. Por lo tanto, no hay solución para este caso.

Caso 4: $x < 0$,$y < 0$ Se obtienen las ecuaciones $y = 5$ y $x-2y = 10$. Como el valor de y contradice las condiciones del caso, se concluye que no hay solución para este caso.

Luego la solución obtenida en el caso 2 es única, siendo $x + y = 1$.

Problema 99. ¿Cuántos enteros positivos ABC de tres dígitos existen, de modo que $(A + B)^C$ es un entero de tres dígitos y una potencia entera de 2?

Solución:

Para que $(A+B)^C$ sea una potencia de 2 y un número de 3 dígitos, entonces sólo puede ser una de las siguientes opciones:

- $2^7 = (1+1)^7 = (2+0)^7$, luego, se tienen los números 117 y 207.
- Para $2^8 = (1+1)^8 = (2+0)^8$, luego, se tienen los números 118 y 208.
- Para $2^9 = (1+1)^9 = (2+0)^9$, luego, se tienen los números 119 y 209.
- Para $4^4 = (1+3)^4 = (2+2)^4 = (3+1)^4 = (4+0)^4$, luego, se tienen los números 134, 224, 314 y 404.
- Para $8^3 = (1+7)^3 = (2+6)^3 = (3+5)^3 = (4+4)^3 = (5+3)^3 = (6+2)^3 = (7+1)^3 = (8+0)^3$, luego, se tienen los números 173, 263, 353, 443, 533, 623, 713, 803.
- Para $16^2 = (7+9)^2 = (8+8)^2 = (9+7)^2$, luego, se tienen los números 792, 882 y 972.

En total 21 casos.

Problema 100. En una isla de 2017 personas, algunas siempre mienten y otras siempre dicen la verdad. Más de 1000 de ellos se encuentran en un banquete, sentados todos juntos alrededor de una mesa. Cada uno de ellos dice: "de las 2 personas que se encuentran a mi lado, uno es un mentiroso y el otro dice la verdad". ¿Cuál es el mayor número de personas que dicen la verdad en dicha isla?

Solución:

Sea A la persona que dice la frase "de las 2 personas que se encuentran a mi lado, uno es un mentiroso y el otro dice la verdad". Sean B y C quienes están a la derecha e izquierda de A (no necesariamente en ese orden).

Notemos que existen dos casos para A:

Caso 1: Si A dice la verdad, entonces B miente y C dice la verdad (o viceversa).

Caso 2: Si A miente, entonces pueden suceder 3 eventos, a saber; B y C, ambos mienten, ambos dicen la verdad o bien, uno de ellos dice la verdad y la otra miente. Este último caso no puede suceder pues entonces A estaría diciendo la verdad, lo cual contradice el caso 2. En conclusión, si A miente, consideraremos que para B y C, ambos mienten o ambos dicen la verdad.

Como deseamos obtener el mayor número de personas que digan la verdad, entonces conviene considerar que a los lados de A estén dos personas que siempre digan la verdad. Por lo anterior, se tiene que, por cada persona mentirosa hay 2 personas que dicen la verdad, por lo tanto la razón entre Verdaderos V y Mentirosos M) es $2:1$ respectivamente. Esto significa que $V = 2M$.

Sabemos que la cantidad de personas, entre verdaderos y mentirosos, que hay en el banquete son más de 1000, es decir qué:

$$\begin{aligned} 1000 &< V + M \\ 1000 &< 3M \\ 333,\overline{3} &< M \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos considerar el menor valor posible de M, de manera que permita obtener un mayor número de personas verdaderas. Esto significa que M debe ser igual a 334. Por lo tanto, en el banquete deben asistir la totalidad de mentirosos de la isla que corresponde a 334. Finalmente, la cantidad de personas en la isla que dicen la verdad es $2017 - 334 = 1683$.